1 ARCS ~ CYCLES

ARC OUVERT = Homéo $\mathbb{R}$

ARC FERME = Homéo $\overline{\mathbb{R}}$

ARC SEMI-OUVERT = Homéo $\mathbb{R}^+$

ARC = Arc ouvert OU Arc fermé OU Arc Semi-Ouvert

CYCLE = Homéo cercle euclidien de rayon non nul.

EPOINTE d'un Espace Topologique = Espace Topologique privé d'un de ses points.

AUTO (MORPHISME) de l'Espace Topologique E, τ = Homéo $E, \tau \to E, \tau$

AUTO (E, τ) = Ensemble des Automorphismes de E, τ

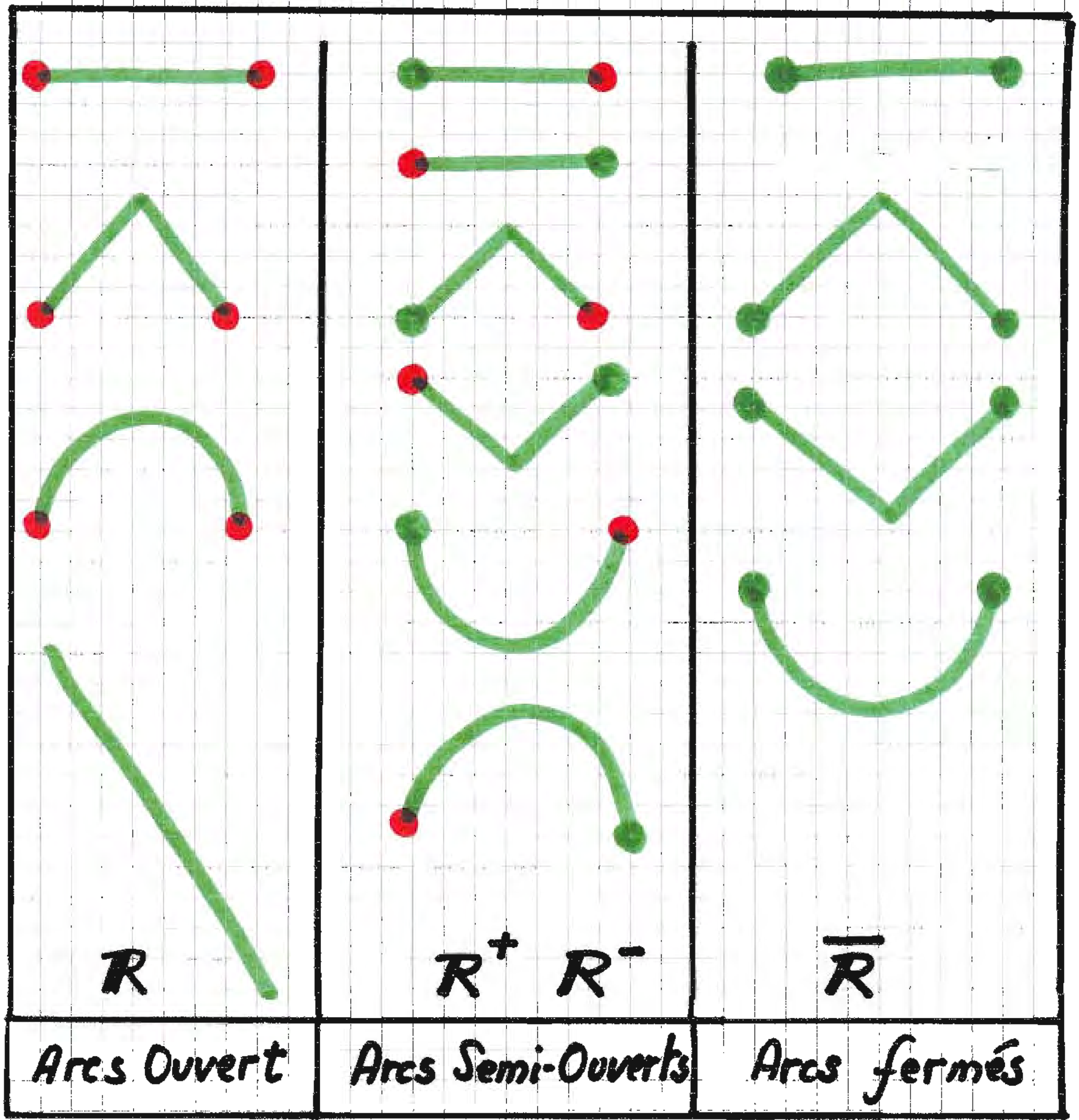
L'Espace Topologique E, τ est HOMOGÈNE

<u>ssi</u>

$\forall a, b \in E \quad \exists f \in \text{Auto}(E, \tau) : f(a) = b.$

Dans cette définition, $\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^+$, et cercles euclidiens sont supposés munis de leur topologie usuelle ▲

■ <u>L'Ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est une base de sa Topologie usuelle.</u>



les arcs fermés
sont aussi appelés arcs continus
ou arcs de JORDAN

Pour tout couple de réels a, b la translation

$$x \longmapsto x + b - a$$

est un auto de $\mathbf{R}, \tau_{us}$ qui applique a sur b.

L'espace topologique $\mathbf{R}, \tau_{us}$ est homogène ■

Tous les arcs ouverts sont homéomorphes et leur cardinal égale $\#\mathbf{R}$

$\mathbf{R}, \tau_{us}$ est le prototype des arcs ouverts.

Tous les arcs ouverts sont des espaces topologiques homogènes ■

Les droites du plan Π sont des arcs ouverts ... mais ne sont pas des ouverts de Π, τ_{us} ■

Les intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ sont des arcs ouverts ■

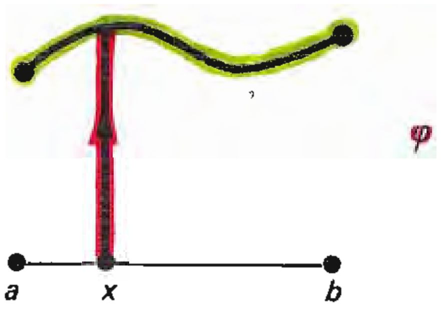
2 Bijection d'une Application

Voici l'application $f : [ab] \to \mathbf{R}$

f est une partie de $[ab] \times \mathbf{R}$

f est un ensemble

f définit l'application $\varphi : [ab] \rightarrow f$



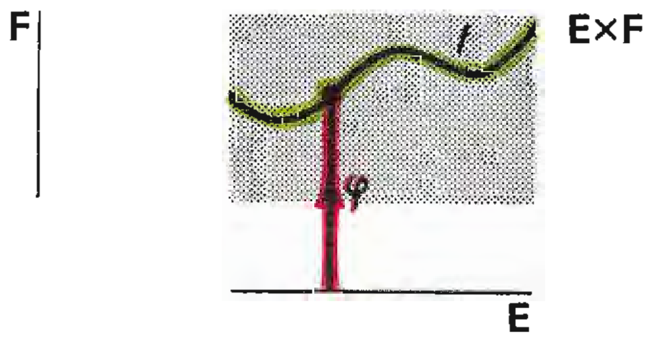
$\varphi : [ab] \to f : x \mapsto (x, f(x))$

φ est une bijection $[ab] \to f$

φ est LA BIJECTION de l'APPLICATION f .

Plus généralement,
toute application $f : E \to F$,
définit la bijection $\varphi : E \to f : x \mapsto (x, f(x))$,
appelée BIJECTION de l'APPLICATION f.

Il sera commode d'encore utiliser le SCHÉMA



$f : E \to F$

$\varphi : E \to f : x \mapsto (x, f(x))$

THÉORÈME

Si φ est la bijection de l'application f : E, $\mathcal{T} \to$ F, $\mathcal{U}$ d'espaces topologiques,

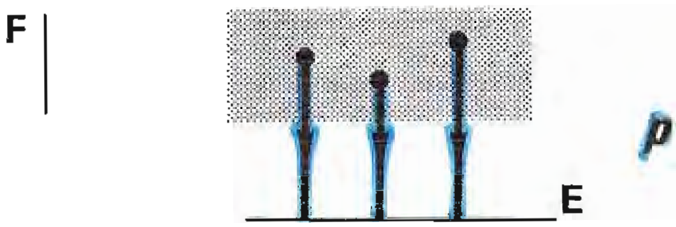
Alors f continue $\Leftrightarrow$ φ continue $\Leftrightarrow$ φ homéo
f continue $\Rightarrow$ f homéomorphe à E, $\mathcal{T}$

Démonstration

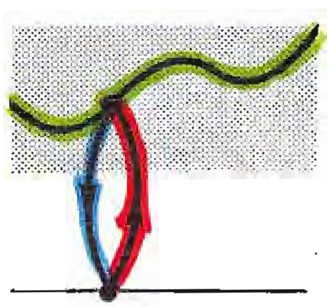
Établissons d'abord que

pour toute f : E, $\mathcal{T} \to$ F, $\mathcal{U}$: $\boxed{\varphi^{-1} \text{ est continue}}$

La projection p : $\mathrm{E} \times \mathrm{F} \to \mathrm{E}$: $(x, y) \mapsto x$



est continue de même que sa restriction p_f à f.

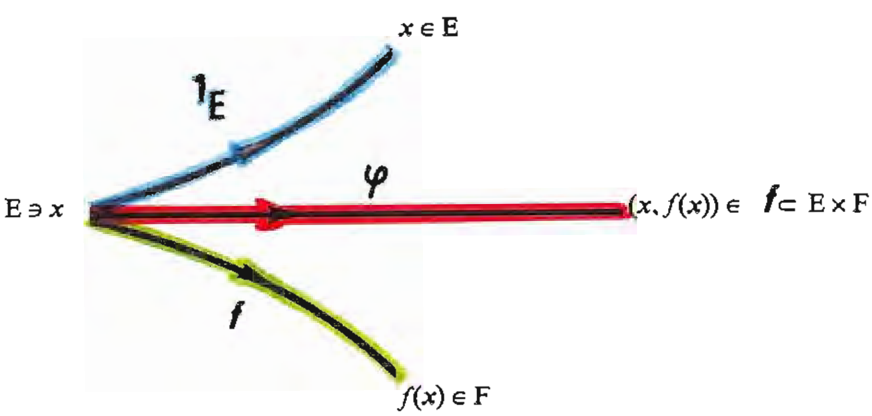


$p_f = \varphi^{-1}$

Dès lors

φ continue $\Leftrightarrow$ φ et φ^{-1} continues $\Leftrightarrow$ φ homéo.

Par le théorème de la fourche



φ continue *ssi* f et 1_E continues *ssi* f continue.

Finalement

f continue *ssi* φ homéo.

Si $f : E, \mathcal{T} \to F, \mathcal{U}$ continue,

Alors $\varphi : E, \mathcal{T} \to f$ homéo,

Donc f homéomorphe à $E, \mathcal{T}$ c.q.f.d.

Applications

Dans tout cours d'analyse, on établit la continuité de la fonction de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$: $(x, y) \mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}$ qui s'identifie naturellement à une demi-sphère fermée de rayon 1.

Le domaine de cette fonction est un disque fermé de rayon 1. Il en résulte que toute demi-sphère fermée de rayon 1 est homéomorphe à un disque fermé (de rayon non nul).

On obtiendrait un théorème analogue pour les demi-sphères ouvertes.

Si f est une fonction continue $E, \mathcal{T} \to F, \mathcal{U}$

Alors $x \mapsto (x, f(x))$ est un homéo $E, \mathcal{T} \to f$.

(la partie f de $E \times F$ étant munie de la topologie héritée de l'espace produit)

Toute fonction continue $\mathbf{R} \to F, \mathcal{U}$ est un arc ouvert ■

Pour tout couple de réels distincts, la fonction continue $]a, b[\to \mathbf{R}$ est un arc ouvert.

Le demi-cercle ouvert de rayon 1 :

$]-1, 1[\to \mathbf{R} : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

est un arc ouvert ■

▲ Dans la définition des épointés de l'espace topologique E, τ on a implicitement supposé l'espace obtenu en privant E d'un de ses points, muni de la topologie induite par τ ▲

□ Tous les épointés d'un espace topologique homogène sont homéomorphes ■

Tous les épointés d'un arc ouvert sont homéomorphes ■

□ Tout épointé d'un arc ouvert est homéomorphe à la réunion de deux parallèles distinctes de Π ■

■

■ L'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ et des intervalles semi-ouverts de $\overline{\mathbf{R}}$ qui comprennent $-\infty$ ou $+\infty$ est une base de la topologie usuelle de $\overline{\mathbf{R}}$

Toute permutation monotone de $\overline{\mathbf{R}}$ est un auto de $\overline{\mathbf{R}}, \tau_{us}$

□ Tous les arcs fermés sont homéomorphes et leur cardinal est $\# \mathbf{R}$

L'Espace $\overline{\mathbf{R}}, \tau_{us}$ est le prototype des arcs fermés ■

Tout segment fermé non singleton de Π est un arc fermé ■

Toute fonction continue $\overline{\mathbf{R}} \longrightarrow F, \mathcal{U}$ est un arc fermé ■

Le demi-cercle $[-1,1] \to \mathbf{R} : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est un arc fermé ■

■

■ L'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbf{R}_0^+$ et des intervalles semi-ouverts de $\mathbf{R}^+$ qui comprennent 0 est une base de la topologie usuelle de $\mathbf{R}^+$

Toute permutation croissante de $\mathbf{R}^+$ est un auto de $\mathbf{R}^+, \mathcal{T}_{us}$

Tous les arcs semi-ouverts sont homéomorphes et leur cardinal égale $\# \mathbf{R}$

Les segments semi-ouverts non vides de Π et les intervalles semi-ouverts non vides de $\mathbf{R}, \overline{\mathbf{R}}, \mathbf{R}^+$ sont des arcs semi-ouverts.

■

■ La topologie usuelle d'un cercle euclidien est celle qu'il hérite de la topologie usuelle du plan euclidien qui le contient.

■ La topologie usuelle d'un cercle euclidien est encore définie par la restriction à celui-ci de la distance euclidienne du plan euclidien qui le contient.

□ Tous les cercles euclidiens de même rayon sont isométriques et donc homéomorphes. ■

■ Deux cercles euclidiens de rayons non nuls distincts et contenus dans un même plan euclidien sont images l'un de l'autre par des homothéties réciproques non constantes.

Toute homothétie non constante du plan euclidien Π est un auto de $\Pi, \mathcal{T}_{us}$

Deux cercles euclidiens coplanaires de rayons distincts non nuls sont homéomorphes

Tous les cercles euclidiens de rayons non nuls sont homéomorphes.

Tous les cycles sont homéomorphes ■

Toute symétrie orthogonale du plan euclidien Π est un homéo de $\Pi, \mathcal{T}_{us}$

Toute symétrie dont l'axe comprend le centre d'un cercle Γ de Π définit un auto de $\Gamma, \mathcal{T}_{us}$ ■

Pour tout couple de points a, b d'un cercle Γ, il existe une symétrie orthogonale s dont l'axe comprend le centre du cercle et telle que $s(a) = b$

Le cercle euclidien $\Gamma, \mathcal{T}_{us}$ est un espace topologique homogène. ■

Tous les cycles sont des Espaces topologiques homogènes ■

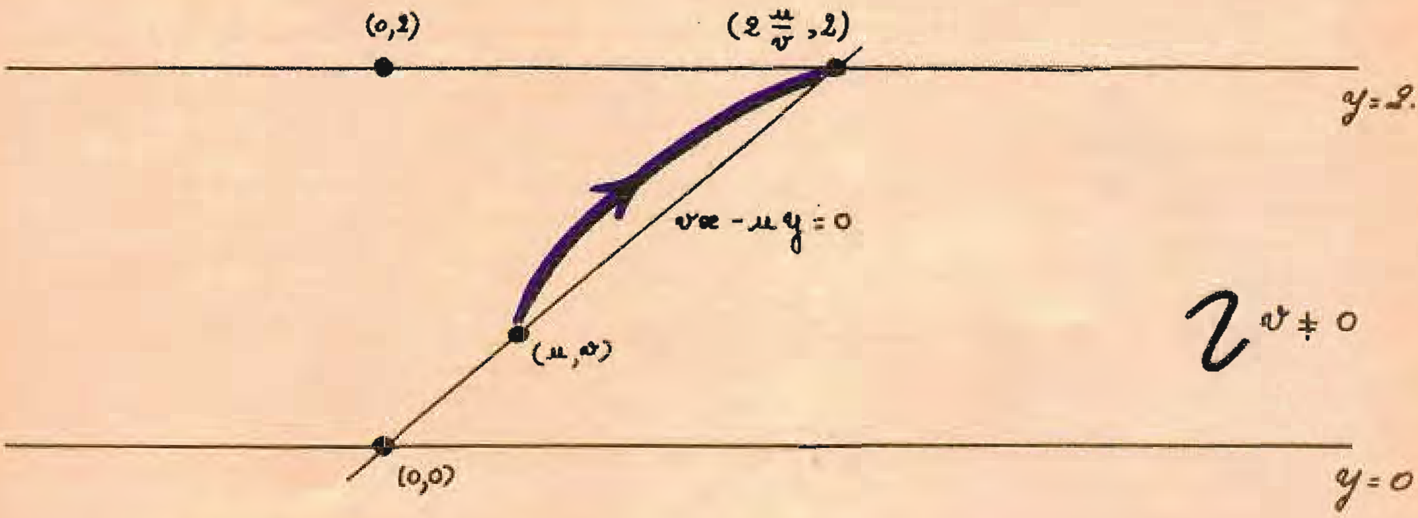
Tous les cycles épointés sont homéomorphes. ■

■

Arcs et Cycles sont des Hausdorff.

■

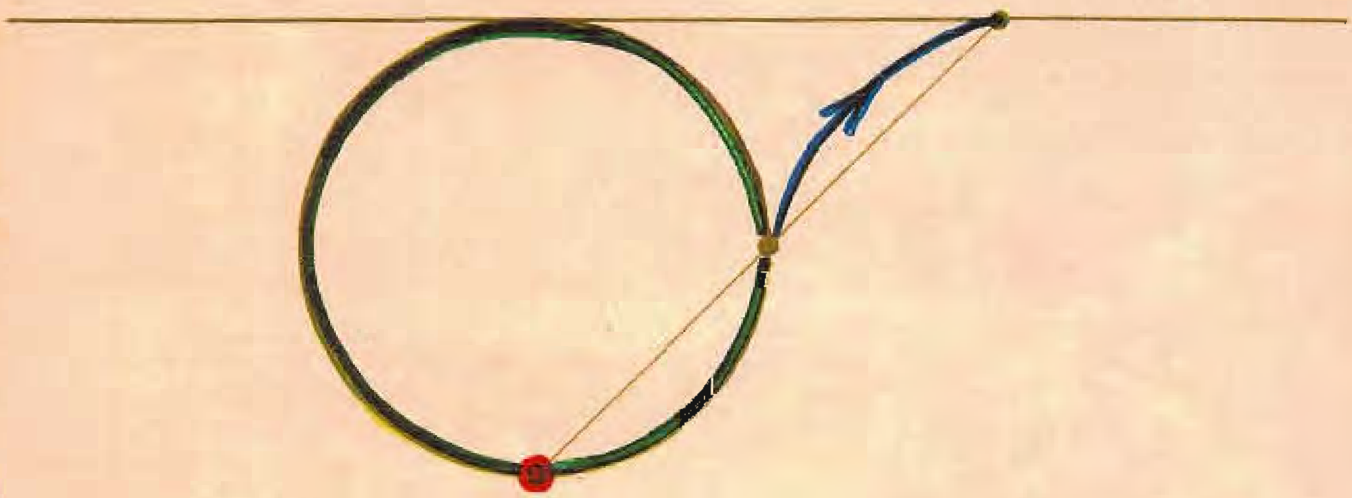
dans $\mathbb{R}^2$, la projection de centre $(0,0)$ sur la droite $y=2$



est la fonction continue :

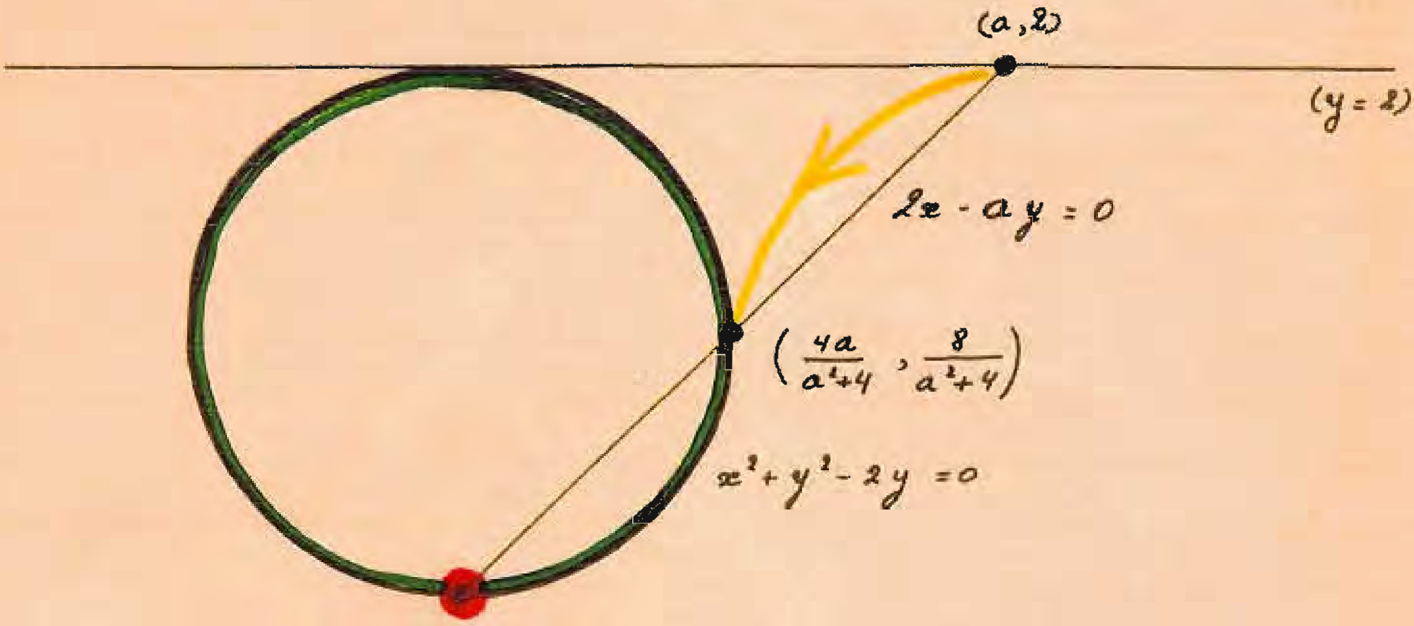
$$\mathbb{R}^2 \setminus (\text{droite } y=0) \longrightarrow (\text{droite } y=2) : (u,v) \longmapsto (2\tfrac{u}{v}, 2)$$

Restriction de cette fonction continue, la projection stéréographique



est une fonction continue d'un cercle épointé dans la droite $y=2$.

La réciproque de cette projection stéréographique



est la fonction continue

$$(\text{droite } y=2) \longrightarrow \text{cercle épointé} : (a,2) \longmapsto \left(\frac{4a}{a^2+4}, \frac{8}{a^2+4}\right)$$

La projection stéréographique est un homéo :
cercle épointé $\longrightarrow$ droite.

□ Tout cycle épointé est un arc ouvert ■

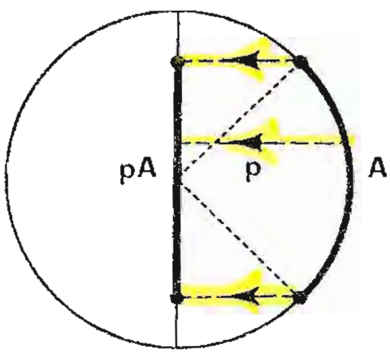
Le cardinal de tout cycle est $\#\mathbb{R}$;

■

A R C S

Les isométries du plan euclidien et ses homothéties de rapport non nul
permutent l'ensemble de ses disques ouverts
et sont donc des homéos $\Pi, \mathcal{T}_{us} \to \Pi, \mathcal{T}_{us}$

Tous les quarts de cercle de même rayon sont isométriques.
Et, pour tous réels $r \neq 0 \neq s$, tout quart de cercle de rayon r est homothétique
à tout quart de cercle de rayon s .
Tous les quarts de cercle de rayon non nul sont homéomorphes.



Appelons p la (fonction) :
projection orthogonale du quart de cercle A sur le diamètre D parallèle à sa corde.
Par la géométrie élémentaire, p est une bijection de A sur le *segment fermé* pA .
Equipant A de la maxidistance m et fA de la distance euclidienne e ,
(ou de la maxidistance, ou de la taxidistance !),
on vérifie aisément que p est une isométrie $A,m \to pA,e$ et donc un homéo $A, \mathcal{T}_{us} \to pA, \mathcal{T}_{us}$

□ *Tout quart de cercle est homéomorphe à un segment fermé non singleton.* ■

Par définition : ARC FERME $\triangleq$ *Espace topologique homéomorphe à* $\overline{R}, \mathcal{T}_{us}$.

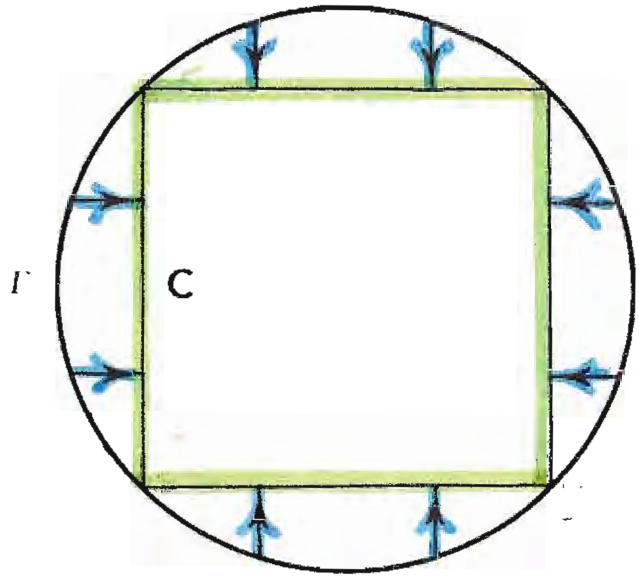
On a donc prouvé
□ *Tout quart de cercle est arc fermé.* ■

EX 429 Tout arc fermé est infini.

EX 430 Tous les arcs fermés sont homéomorphes.

EX 431 $\bar{R}$, $\bar{R}^+$, $\bar{R}^-$ sont arcs fermés.

EX 432 L'application $\Gamma \to C$,



est isométrique *par morceaux* $\Gamma, m \to C, e$

mais non isométrique $\Gamma, m \to C, e$

Pourriez-vous établir qu'il s'agit néanmoins d'un homéo $\Gamma, \mathfrak{T}_{us} \to C, \mathfrak{T}_{us}$?

CYCLE $\triangleq$ Espace topologique homéomorphe à un cercle euclidien de rayon non nul.

La topologie usuelle d'un cercle euclidien est celle qu'il hérite de la topologie usuelle du plan euclidien qui le contient

La topologie usuelle d'un cercle euclidien est encore définie par la restriction à celui-ci de la distance euclidienne du plan euclidien qui le contient.

Tous les cercles euclidiens de même rayon sont isométriques et donc homéomorphes.

Deux cercles euclidiens de rayons non nuls distincts et contenus dans un même plan euclidien sont images l'un de l'autre par des homothéties réciproques non constantes.

Toute homothétie non constante du plan euclidien Π est un automorphisme (topologique) de $\Pi, \mathcal{T}_{us}$.

Deux cercles euclidiens coplanaires de rayons non nuls distincts sont homéomorphes.

Tous les cercles euclidiens de rayons non nuls sont homéomorphes.

Tous les cycles sont homéomorphes.

Toute symétrie orthogonale du plan euclidien Π est un automorphisme (topologique) de $\Pi, \mathcal{T}_{us}$.

Toute symétrie orthogonale dont l'axe comprend le centre d'un cercle de Π définit un automorphisme de ce cercle muni de sa topologie usuelle.

Pour tout couple (a,b) de points d'un cercle Γ, il existe une symétrie orthogonale s dont l'axe comprend le centre du cercle et telle que $sa = b$.

Tout cercle est un espace topologique HOMOGENE
c.à.d. pour tout couple de points de cet espace, existe un automorphisme (topologique) appliquant le premier point sur le second.

EX Au lieu d'ARC FERMÉ,
on trouvera aussi dans la littérature les expressions :

ARC, ARC CONTINU, ARC DE JORDAN, ARC SIMPLE …

Au lieu de CYCLE,
on trouvera aussi les expressions :

COURBE SIMPLE FERMÉE, COURBE DE JORDAN …

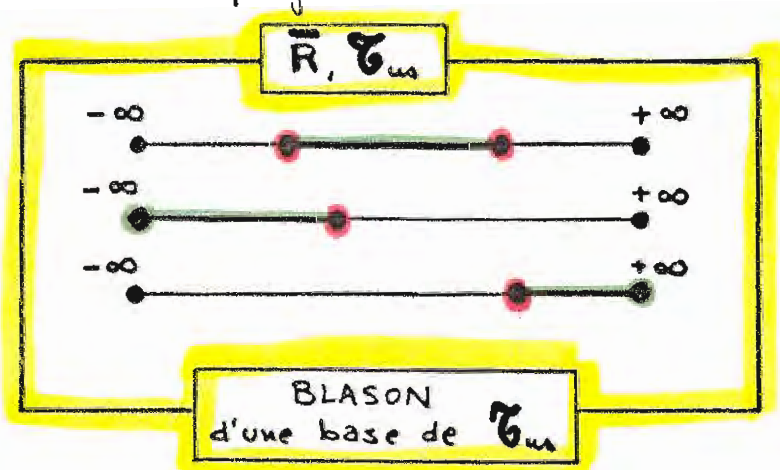
EX ► Objets distincts $+\infty$ et $-\infty$ n'appartenant pas à $\mathbb{R}$

► $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'un ordre total qui prolonge celui de $\mathbb{R}, \leqslant$ en posant :

$$\forall r \in \mathbb{R} \ : \ -\infty < r < +\infty$$

On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une topologie dont voici le blason d'une base



$\overline{\mathbb{R}}$ ainsi structuré est la DROITE RÉELLE ACHEVÉE

□ $\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{us}$ est homéo à tout segment fermé non singleton de $\mathbb{R}, \mathcal{T}_{us}$ ■
cf. [F3] pp. 129 - 130

EX On a vu que

TOUTE PERMUTATION MONOTONE de

$\mathbb{R}, \leqslant$ $\quad\quad$ $\overline{\mathbb{R}}, \leqslant$ $\quad\quad$ $\mathbb{R}^+, \leqslant$

EST
AUTOMORPHISME de

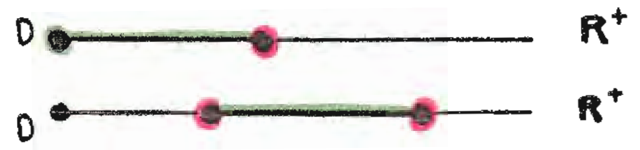
$\mathbb{R}, \mathcal{T}_{us}$ $\quad\quad$ $\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{us}$ $\quad\quad$ $\mathbb{R}^+, \mathcal{T}_{us}$

Au chapitre . on montrera que

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{En} \quad \mathbb{R},\mathcal{T}_{us} \quad \overline{\mathbb{R}},\mathcal{T}_{us} \quad \mathbb{R}^+,\mathcal{T}_{us} \\ \text{PERMUTATION MONOTONE} \\ = \text{AUTOMORPHISME} \end{array}}$$

EX □ Toute permutation monotone de $\mathbb{R}^+,\leqslant$ est auto de $\mathbb{R}^+,\mathcal{T}_{us}$

✻ Voici les ouverts d'une base de la topologie de $\mathbb{R}^+,\mathcal{T}_{us}$



Tout ouvert de $\mathbb{R}^+,\mathcal{T}_{us}$ est réunion d'intervalles de la base exhibée .

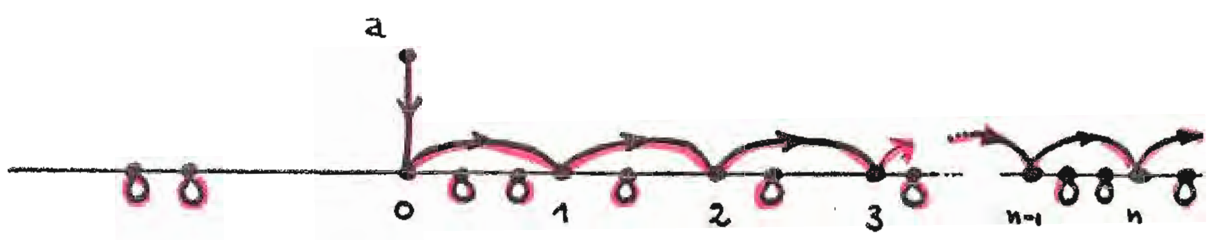
Toute permutation monotone de $\mathbb{R}^+,\leqslant$ permute les intervalles de la base

⊢ Toute permutation monotone de $\mathbb{R}^+,\leqslant$ permute les ouverts de $\mathbb{R}^+,\mathcal{T}_{us}$ et est donc auto de $\mathbb{R}^+,\mathcal{T}_{us}$ ■

EX $\#(\mathbb{R}\cup\{a\}) = \#\mathbb{R}$

✻ • Si $a\in\mathbb{R}$, alors c'est trivial

• Si $a\notin\mathbb{R}$, alors voici une bijection $\mathbb{R}\cup\{a\}\to\mathbb{R}$



EX Dans $\Pi, \mathcal{T}_{us}$

toute parabole est arc ouvert
toute ellipse est cycle
toute hyperbole est réunion disjointe de deux arcs ouverts

EX $R \to R \; : \; x \mapsto x^2$ est arc ouvert

EX $R_0^+ \to R_0^+ \; : \; x \mapsto \frac{1}{x}$ est arc ouvert

$R_0^- \to R_0^- \; : \; x \mapsto \frac{1}{x}$ est arc ouvert

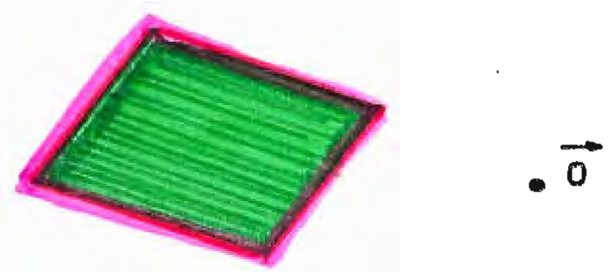
EX Pour tout réel r

$R \setminus \{r\}$ est réunion disjointe de deux arcs ouverts

EX $R \to R \; : \; x \mapsto e^x$ est arc ouvert

EX □ Toute permutation linéaire de $R, \Pi_o, +$ est auto de $\Pi, \mathcal{T}_{us}$

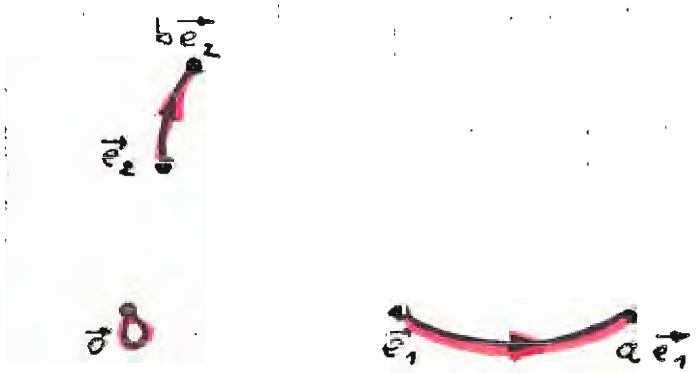
✻ L'ensemble des parallélogrammes ouverts de Π est une base de la topologie de $\Pi, \mathcal{T}_{us}$



Toute permutation linéaire de $R, \Pi_o, +$ permute les parallélogrammes ouverts de Π

⊢ Toute permutation linéaire de $R, \Pi_o, +$ est auto de $\Pi, \mathcal{T}_{us}$ ■

EX Voici la permutation linéaire de $R, \Pi_o, +$ définie par le blason



Sa $\longmapsto$ restriction

$\{x\vec{e}_1+y\vec{e}_2 \mid x^2+y^2=1\} \longrightarrow \{x\vec{e}_1+y\vec{e}_2 \mid (\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1\}$

$\longmapsto$ est homéo .

Si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ est une base orthonormée ,

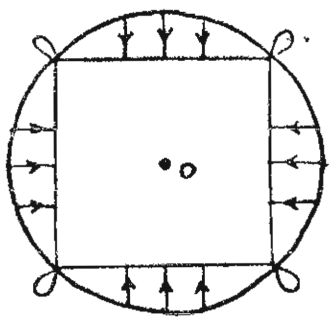
alors $\{x\vec{e}_1+y\vec{e}_2 \mid x^2+y^2=1\}$ est un cercle euclidien non si

□ Dans $\Pi, \mathcal{T}_{us}$ toute ellipse est cycle ■

EX □ Dans $\Pi, \mathcal{T}_{us}$

tout carré est cycle

*



décrit schématiquement un homé du cercle de centre o et de rayon 1 sur un carré

Cette application est la réciproque de la restriction au carré de la transformation $\Pi_o \setminus \{\vec{o}\} \to \Pi_o \setminus \{\vec{o}\} : \vec{x} \longmapsto \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$, dans le vectoriel euclidien plan $\mathbb{R}, \Pi_o, +$.

EX □ Dans $\Pi, \mathcal{T}_{us}$,

tout rectangle est cycle
tout parallélogramme est cycle ■