10. APPLICATIONS MONOTONES D'ARCS

Voici une application MONOTONE d'Arcs :

$$f : A \longrightarrow B$$

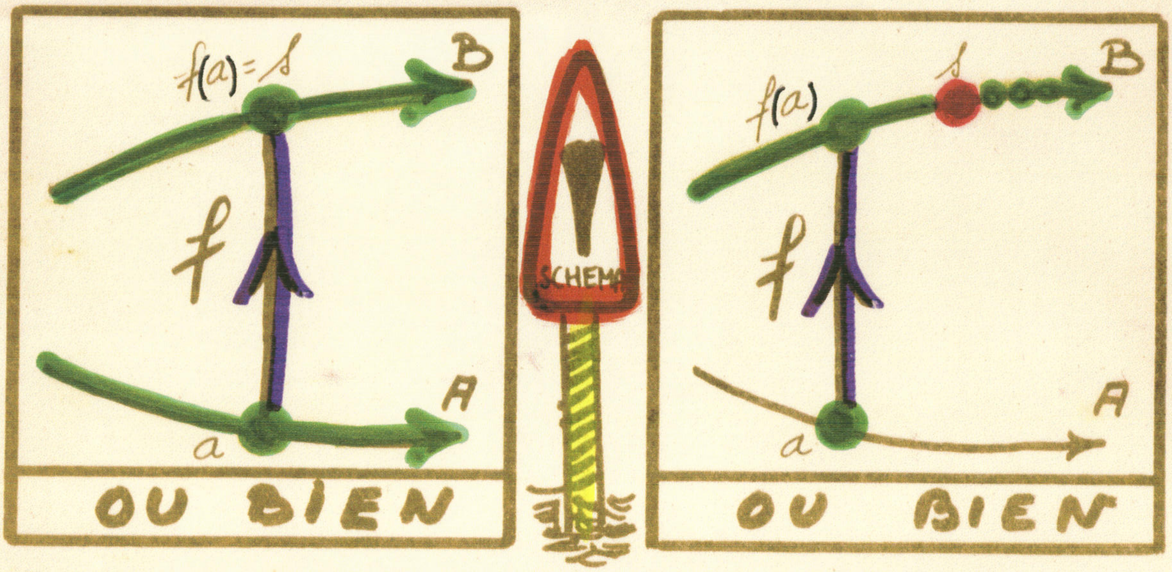
Nous posons le problème de la CONTINUITÉ éventuelle de f en $a \in A$

Ordonnons A et B pour rendre f croissante

Pour tout a non maximum de A nous définissons

▲ s = infimum de l'image par f de l'ensemble des points de A qui sont $> a$

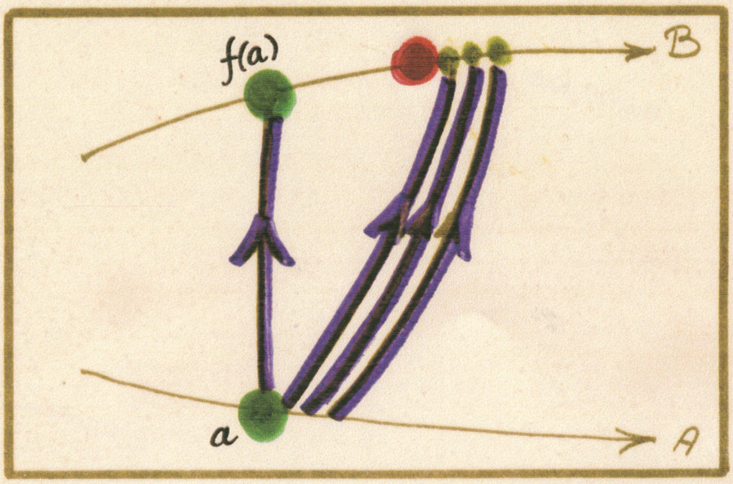
$$f(a) \leq s$$



Ces dessins ébauchent schématiquement l'image de f
Les points de suspension verts après le point rouge, rappellent - sous compromission ! - que, dans la seconde

éventualité, tout intervalle ouvert de B d'origine s comprend des points de $f\,A$

Dans cette éventualité $\left]\, f(a), s \,\right[\cap \operatorname{im} f = \emptyset$



Certains voisinages de $f(a)$ ne contiennent l'image d'AUCUN voisinage de a

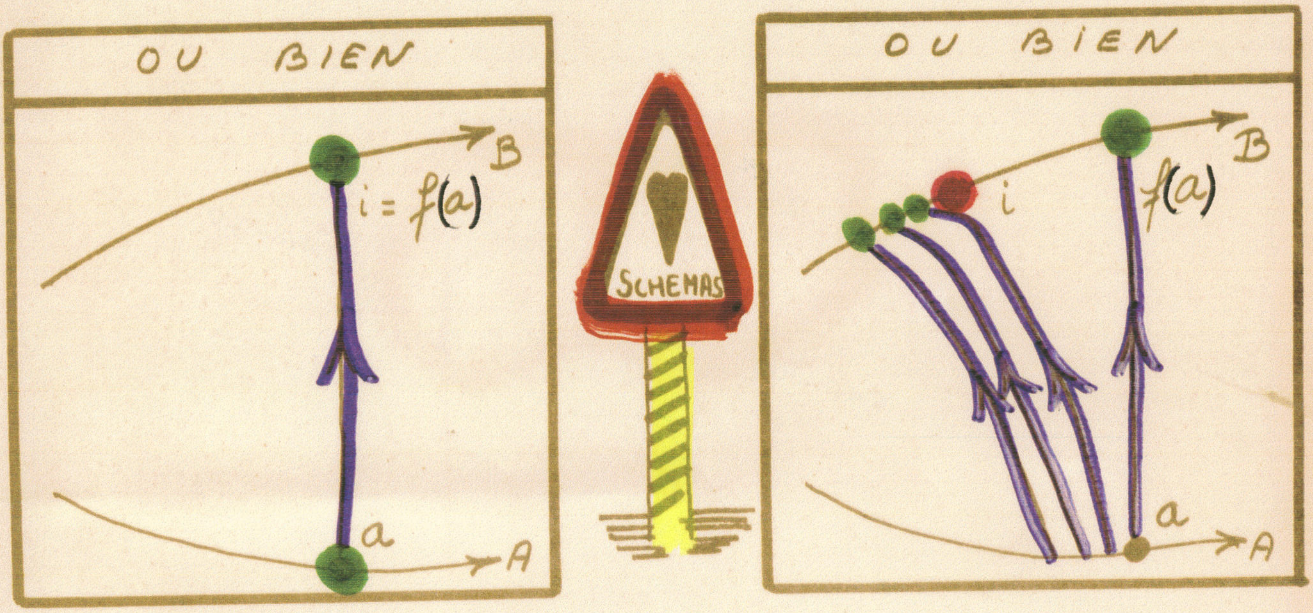
Dans la seconde éventualité

f non continue en a.

De manière duale, pour tout a non minimum de A, nous définissons

▲ i = suprémum de l'image par f de l'ensemble des points de A qui sont $< a$

$$i \leq f(a)$$



...

: Pour tout élément non extrémal a de A

$i \neq f(a) \vee f(a) \neq s \Rightarrow f$ discontinue en a

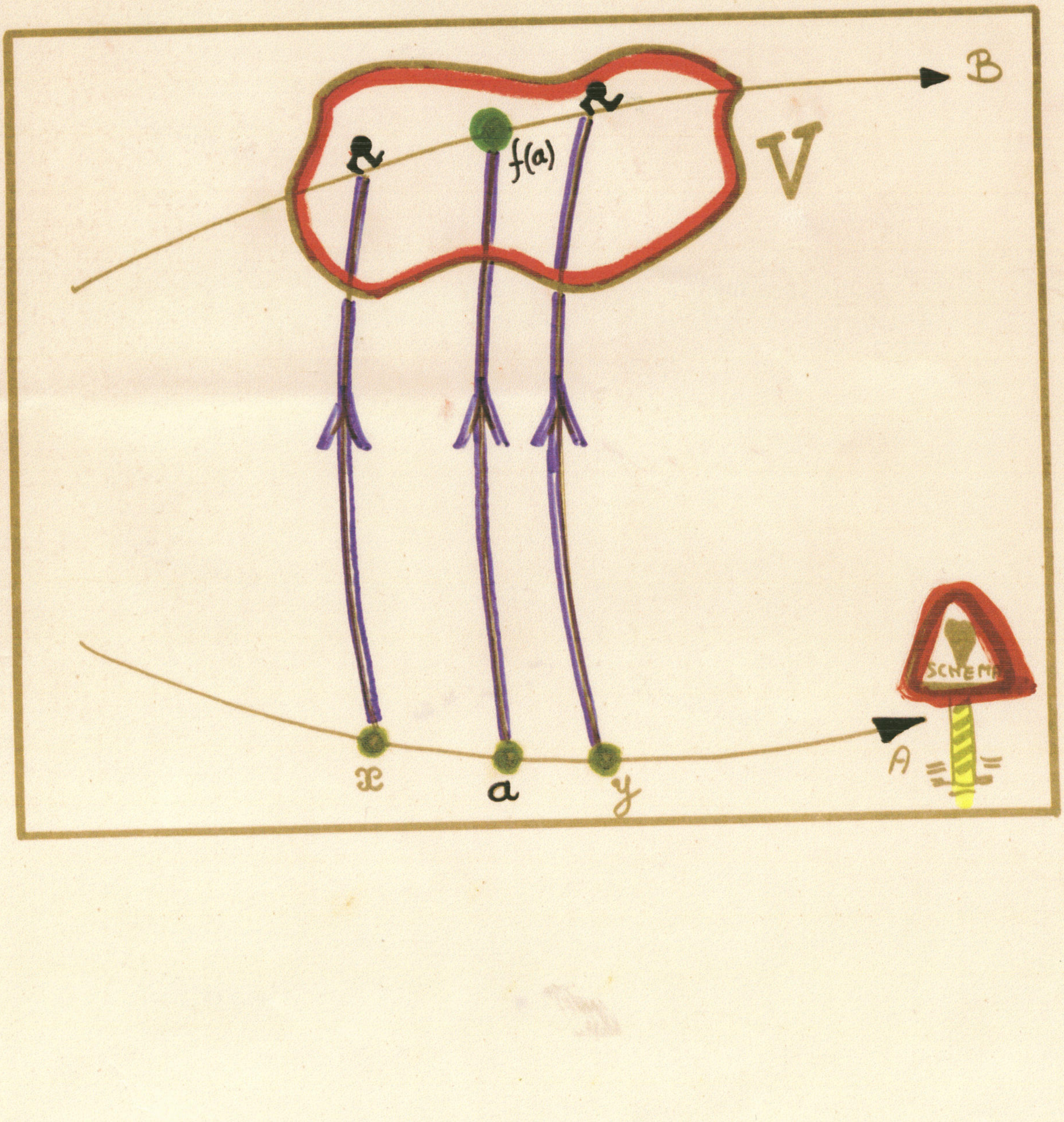
Pour tout élément non extrémal a de A

f continue en a $\iff$ $i = f(a) = 1$

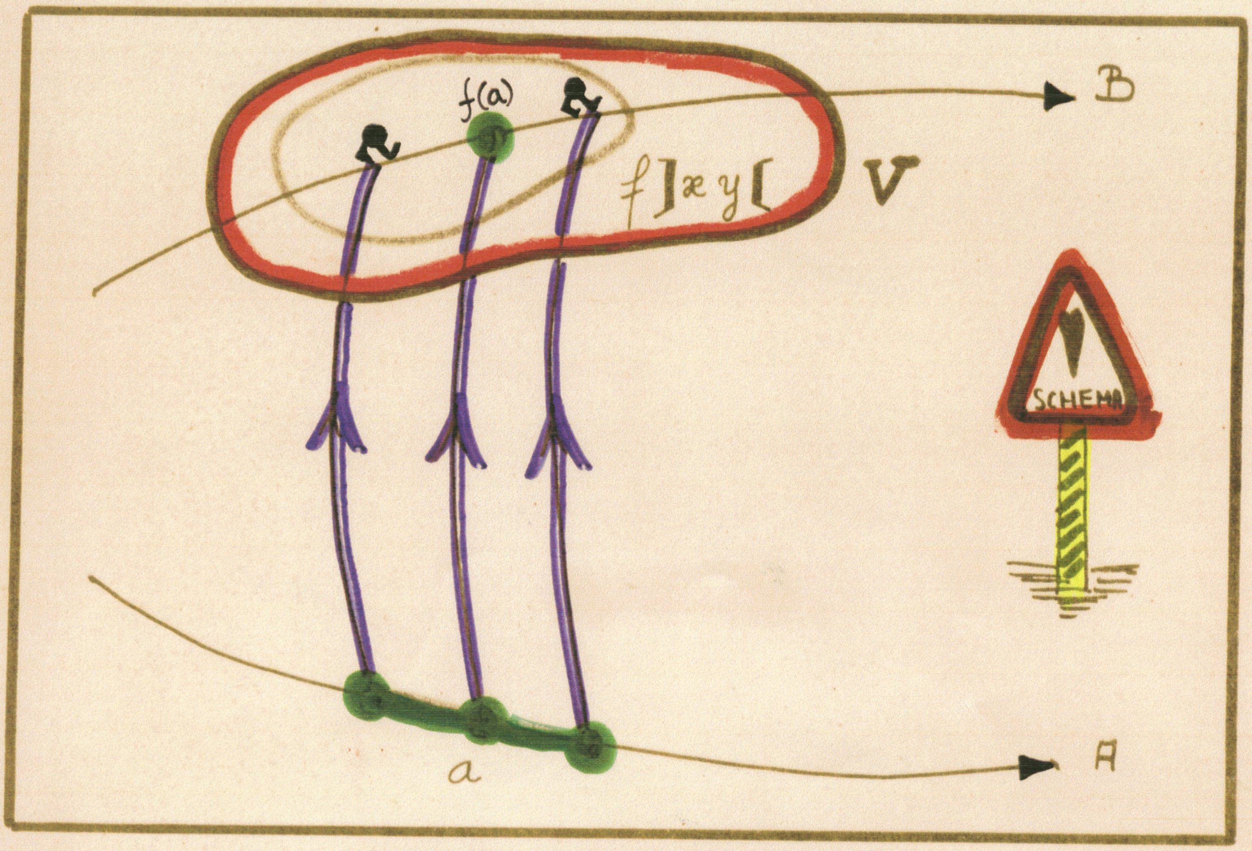
Reste à prouver $\Leftarrow$

* TOUT voisinage V de $f(a)$ comprend

☆ un $f(x) < f(a)$ et un $f(y) > f(a)$



Ce voisinage V contient $f\,]x\,y[$



f continue en a

Pour toute application croissante d'axes ordonnés

$$f : A \longrightarrow B$$

Pour tout élément non extrémal a de A :

$$f \text{ continue en } a \iff i = f(a) = s$$

En le minimum éventuel a de A :

$$f \text{ continue en } a \iff f(a) = s$$

En le maximum éventuel a de A

$$f \text{ continue en } a \iff i = f(a)$$

Par oubli à partir de la <u>démonstration</u> précédente

: <u>Si</u> l'application monotone d'arcs

$f : A \longrightarrow B$

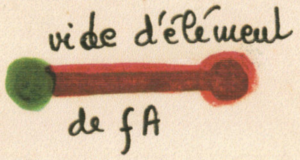
est discontinue en a

<u>Alors</u> Il existe un intervalle fermé non singleton

I_a de B d'extrémité $f(a)$

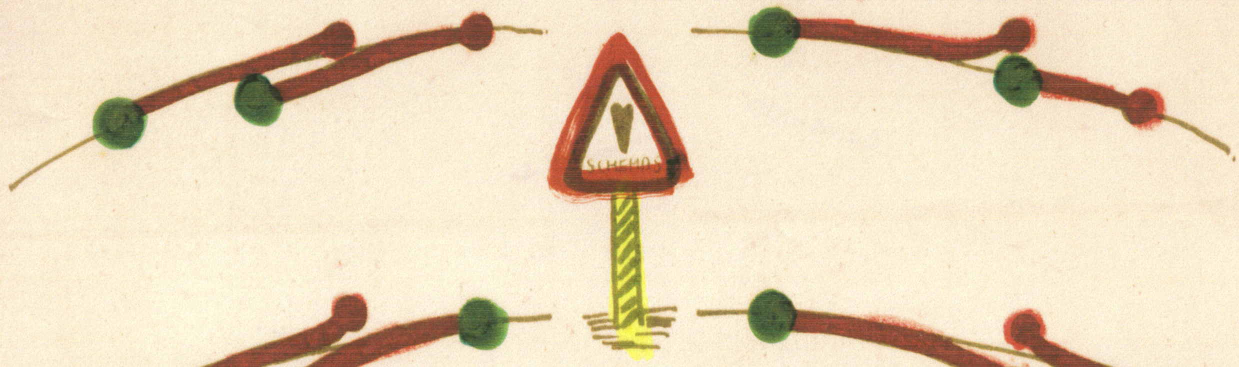
et disjoint de $f A$.

<u>Symboliquement</u>



▲ Deux points de discontinuité $a \neq b$ de l'application monotone d'arcs $f : A \longrightarrow B$

Les situations schématisées ci-dessous



sont impossibles.

Les I_a sont disjoints deux à deux

Remplaçons B par l'un des arcs prototypes $\mathbf{R}, \overline{\mathbf{R}}, \mathbf{R}^+$
Chaque I_a peut être numéroté par l'un de ses rationnels
L'ensemble des I_a est dénombrable
L'ensemble des images des points de discontinuité de f est au plus dénombrable
Or l'image d'un point de discontinuité est l'image d'au plus deux points de discontinuité

* Si $x < y < z$ $\wedge$ $f(x) = f(z)$

Alors f continue (et constante sur un voisinage de) y

Donc l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

L'ensemble des points de discontinuité de toute application monotone d'arcs est au plus dénombrable