13. CYCLES ORIENTÉS

Commençons par établir une proposition de topologie générale qui nous sera bientôt utile.

Voici un Espace topologique $E, \mathcal{T}$
Voici un point p de E
Voici le sous-espace $E' = E \setminus \{p\}$
L'adhérence dans E est notée adh
L'adhérence dans E' est notée adh'

$\forall P \subset E'$

$$\text{adh}' P = (\text{adh } P) \setminus \{p\}$$

$$p \notin \text{adh } P \Longrightarrow \text{adh } P = \text{adh}' P$$

* ▲ $\mathcal{F}_P$ = ensemble des fermés de E qui contiennent P

▲ $\mathcal{F}'_P$ = ensemble des fermés de E' qui contiennent P

$$\mathcal{F}'_P = \{ F \setminus \{p\} \mid F \in \mathcal{F}_P \}$$

$$\text{adh}' P = \bigcap \mathcal{F}'_P = \left(\bigcap \mathcal{F}_P\right) \setminus \{p\} = \text{adh } P \setminus \{p\}$$

■

■

94

<u>Si</u> a_1, b_1 sont points distincts de l'arc ouvert A_1
a_2, b_2 sont points distincts de l'arc ouvert A_2

<u>Alors</u> il existe un homéo : $A_1 \to A_2 : a_1 \mapsto a_2 , b_1 \mapsto b_2$

■

<u>Si</u> $A_1 \cup \{c_1\}$ est compactifié d'Alexandroff de l'arc ouvert A_1 comprenant $a_1 \neq b_1$
$A_2 \cup \{c_2\}$ est compactifié d'Alexandroff de l'arc ouvert A_2 comprenant $a_2 \neq b_2$

<u>Alors</u> il existe un homéo : $A_1 \cup \{c_1\} \to A_2 \cup \{c_2\}$:
$a_1 \mapsto a_2, b_1 \mapsto b_2, c_1 \mapsto c_2$.

■

<u>Si</u> a_1, b_1, c_1 sont points distincts du cycle G_1
a_2, b_2, c_2 sont points distincts du cycle G_2

<u>Alors</u> il existe un homéo $G_1 \to G_2$:
$a_1 \longmapsto a_2 , b_1 \longmapsto b_2 , c_1 \longmapsto c_2$

■

<u>Si</u> $a_1, \dots, a_n$ sont points distincts du cycle G

<u>Alors</u> $G \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ admet n composantes connexes arcs ouverts

■

<u>Si</u> a, b, c sont des réels tels que $a < b < c$

<u>Alors</u> il existe des homéo (décroissant !) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$a \mapsto c, \quad b \mapsto b, \quad c \mapsto a$

De tels homéo échangent les composantes connexes de $\mathbb{R} \setminus \{b\}$

<u>Si</u> a, b, c, d sont points distincts du cycle G tels que c et d n'appartiennent pas à la même composante connexe de $G \setminus \{a, b\}$

<u>Alors</u> il existe des homéo $G \to G$:

$a \mapsto a, \quad b \mapsto b, \quad c \mapsto d, \quad d \mapsto c$

De tels homéo échangent les composantes connexes de $G \setminus \{a, b\}$

* Conséquence immédiate de la proposition précédente à condition de remarquer que G est alexandroff de $G \setminus \{a\}$

■

a, b, c points distincts du cycle C

$]acb[$ = arc ouvert composante connexe de $C \setminus \{a,b\}$ qui comprend c

<u>Si</u> $]acb[$ et $]adb[$ sont les deux arcs ouverts composantes connexes de $C\setminus\{a,b\}$

<u>Alors</u> dans $C\setminus\{d\}$

$$]acb[\; = \;]ab[$$

$$\operatorname{adh}]acb[\; = [ab] = \;]acb[\cup \{a,b\}$$

dans C' : $\operatorname{adh}]acb[\; = \;]acb[\cup \{a,b\} = {}^{\triangledown}[acb]_{\blacktriangle}$

$[acb]$ est le seul sous- arc fermé de C, d'extrémités a, b qui comprenne c

$]acb[\; = [acb]\setminus\{a,b\}$ est **LE** sous-arc ouvert de C d'$^{\triangledown}$extrémités $a, b_{\blacktriangle}$ qui compend a et b

■

a, b points distincts du cycle G

Les arcs ouverts U, V composantes connexes de

$G \setminus \{a, b\}$

sont les deux arcs ouverts (sous-espaces) de G d'extrémités a, b

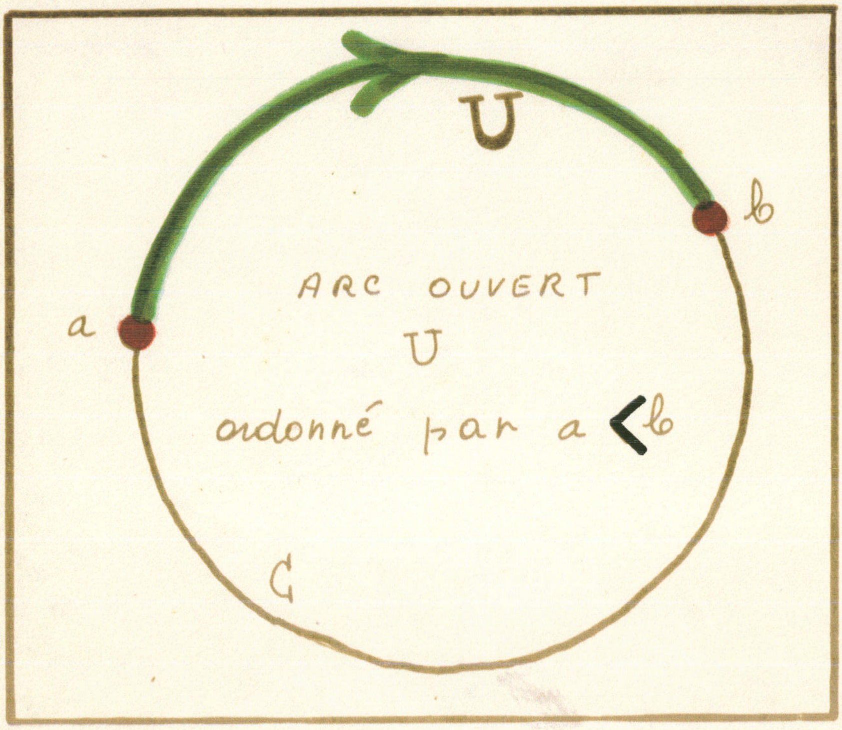
Leurs adhérences $U \cup \{a, b\}$ et $V \cup \{a, b\}$ sont les deux arcs fermés (sous-espaces) de G d'extrémités a, b

Si U est arc ouvert d'extrémités a, b du cycle G

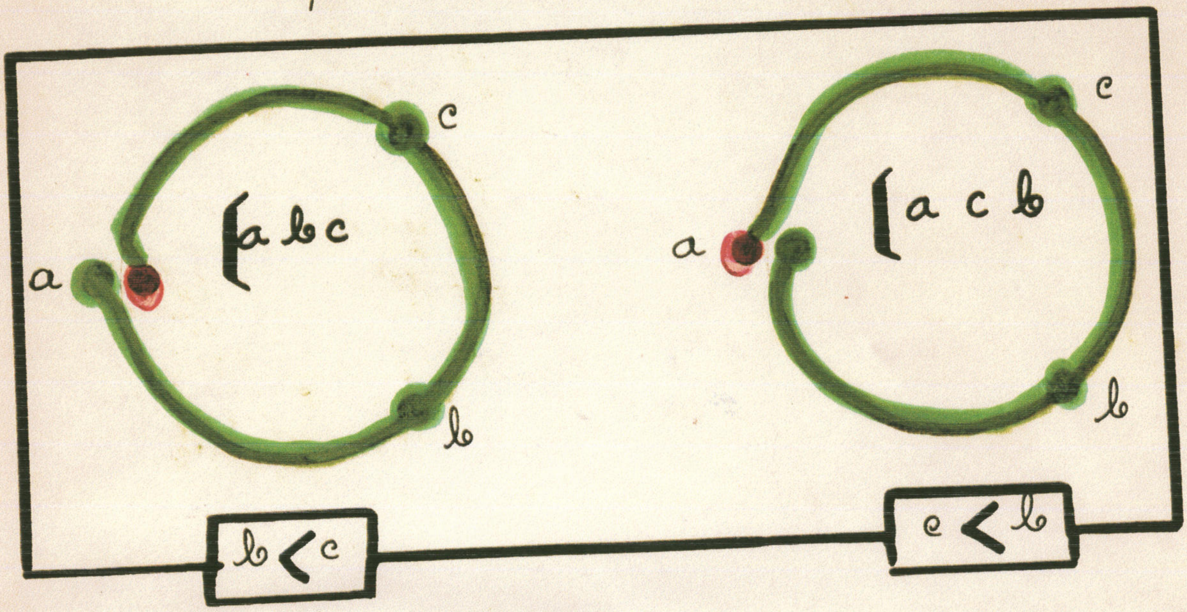
Alors la formule $a < b$ ordonne adh U et

... $U \subset \text{adh } U$

L'arc U muni de cet ordre est dit "ordonné par $a < b$"



▲ a, b, c points distincts du cycle G
b < c ordonne le cycle épointé $G \setminus \{a\}$
détermine un cycle ordonné de minimum a
que l'on notera [a b c



■

▲ a, b points distincts de C

▲ U, V arcs ouverts, composantes connexes de

$$C \setminus \{a, b\}$$

Tout homéo $C \setminus \{a\} \longrightarrow C \setminus \{a\}$
qui applique U sur V est décroissante,
laisse b fixe
se prolonge en un homéo
$C \longrightarrow C$ qui laisse a fixe

▲ h est un tel homéo $C \longrightarrow C$

▲ $\leqslant$ est un des ordres de l'arc ouvert $C \setminus \{a\}$

▲ $\leqslant_1$ = restriction de $\leqslant$ à U

$\wedge$ $U, \leqslant_1$ ordonné par $a < b$

▲ $\leqslant_2$ = restriction de $\leqslant$ à V

▲ $\leqslant_3$ ordre de l'arc fermé adh U qui prolonge $\leqslant_1$

▲ $\leqslant_4$ ordre de l'arc fermé adh V qui prolonge $\leqslant_3$

$a = \min(\text{adh } U, \leqslant_3)$ $\quad$ $b = \max(\text{adh } U, \leqslant_3)$

$h \text{ adh } U = \text{adh } V$

la restriction de h à U est une bijection décroissante $U, \leqslant_1 \longrightarrow V, \leqslant_2$

la restriction de h à adh U est une bijection décroissante adh $U, \leqslant_3 \longrightarrow$ adh $V, \leqslant_4$

$h\,a = a = \max(\text{adh } V, \leqslant_4)$

$h\,b = b = \min(\text{adh } V, \leqslant_4)$

$V, \leqslant_2$ est ordonné par $b < a$.

a, b points distincts du cycle G
U, V, composantes connexes de $G \setminus \{a, b\}$

Si l'un des ordres de $G \setminus \{a\}$ ordonne U par $a < b$

Alors cet ordre de $G \setminus \{a\}$ ordonne V par $b < a$.

---

a, b points distincts du cycle G
U, V composantes connexes de $G \setminus \{a, b\}$

Si le cycle ordonné G_a de minimum a ordonne U par $a < b$

Alors le cycle ordonné G_a de minimum a ordonne V par $b < a$

G_1, G_2 cycles ordonnés du cycle G de minimum appartenant à $\{a, b\} \subset G$

<u>Si</u> G_1, G_2 induisent même ordre sur une composante connexe de $G \setminus \{a, b\}$

<u>Alors</u> G_1, G_2 induisent même ordre sur toute composante connexe de $G \setminus \{a, b\}$

Les cycles ordonnés C_a (de minimum a) et
C_b (de minimum b)
du cycle C

Sont de même Sens

ssi

C_a et C_b induisent même ordre sur une composante connexe de $C \setminus \{a,b\}$

ssi

C_a et C_b induisent même ordre sur toute composante connexe de $C \setminus \{a,b\}$

La relation "... a même sens que ..." définie dans l'ensemble des cycles ordonnés d'un cycle C est réflexive et symétrique ■

La symétrie justifie partiellement la locution "sont de même sens" utilisée dans la définition

Deux cycles ordonnés distincts mais de même minimum n'ont PAS même sens ■

La relation "... a même sens que ..." définie dans l'ensemble des cycles ordonnés du cycle G dont le minimum appartient à $\{a, b\} \subset G$ est une équivalence dont la partition comprend deux classes ■

La locution "sont de même sens" utilisée dans la définition ne sera pleinement justifiée que lorsque nous aurons prouvé la transitivité de la relation "... a même sens que ..." définie dans l'ensemble de tous les cycles ordonnés d'un cycle G.

a, b, c points distincts du cycle G
le cycle ordonné $[abc$ ordonne par $a < b$
la composante connexe de $G \setminus \{a, b\}$ qui ne comprend pas c.

$[abc$ et $[bca$ ordonnent la composante connexe de $G\setminus\{a, b\}$ qui ne comprend pas c par $a < b$

$[acb$ et $[bac$ l'ordonnent par $a > b$

$[abc$ et $[bca$ sont de même sens

$[acb$ et $[bac$ sont de même sens

$[abc$ et $[acb$ ne sont pas de même sens.

a, b, c points distincts du cycle C $\qquad \{r, s, t\} = \{a, b, c\}$

$[a\,b\,c$ et $[r\,s\,t$ n'ont pas même sens

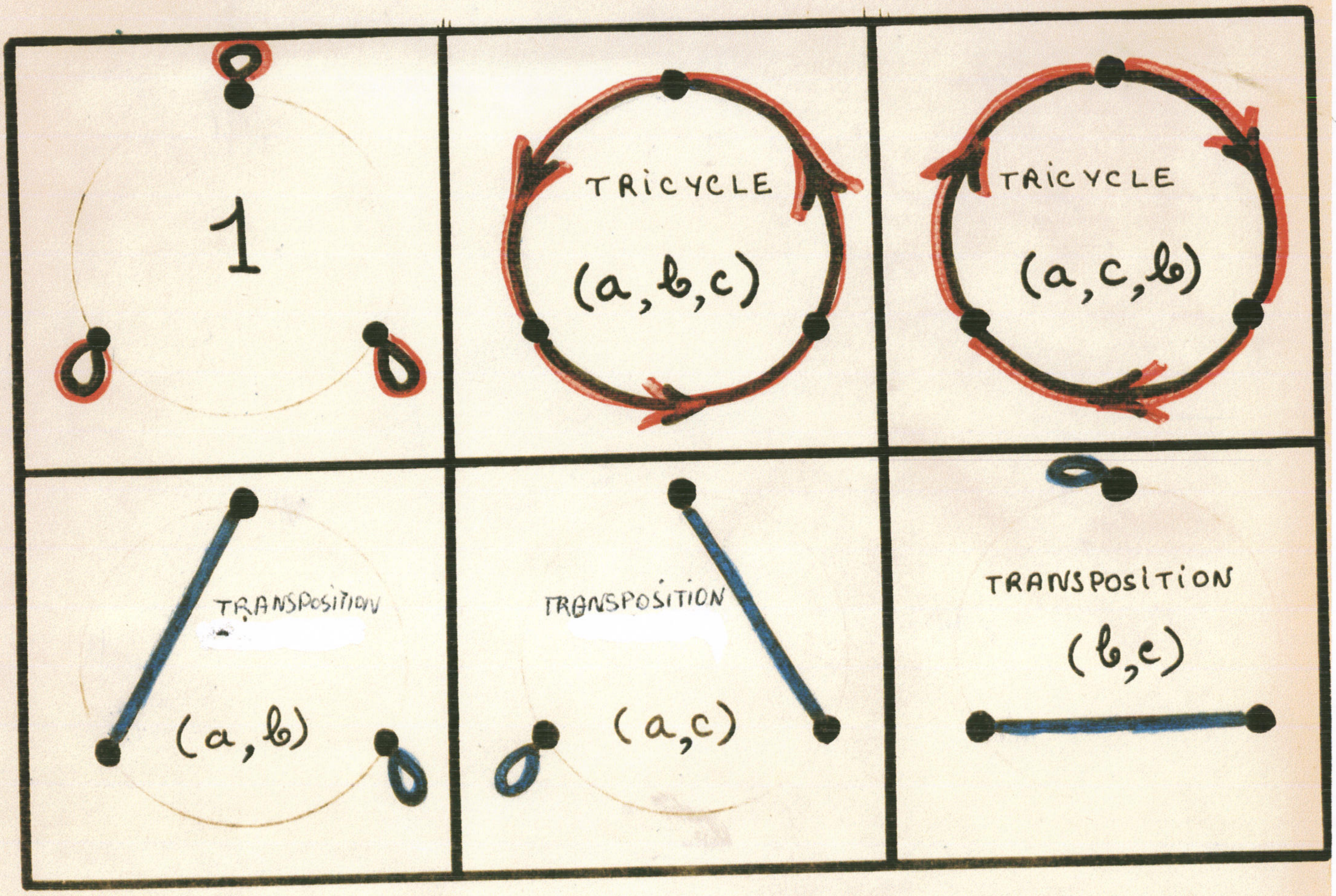
ssi

la permutation $\begin{pmatrix} a & b & c \\ r & s & t \end{pmatrix}$: $a \mapsto r,\ b \mapsto s,\ c \mapsto t$

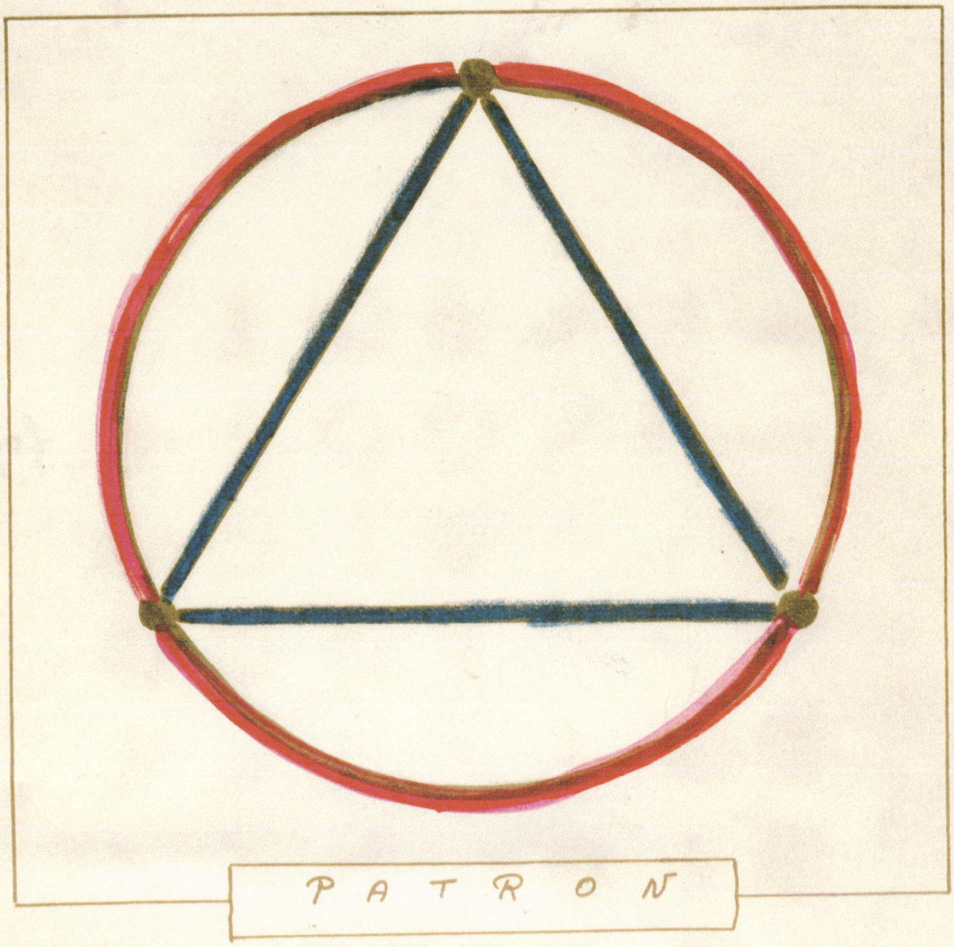
laisse un et un seul point fixe

ssi

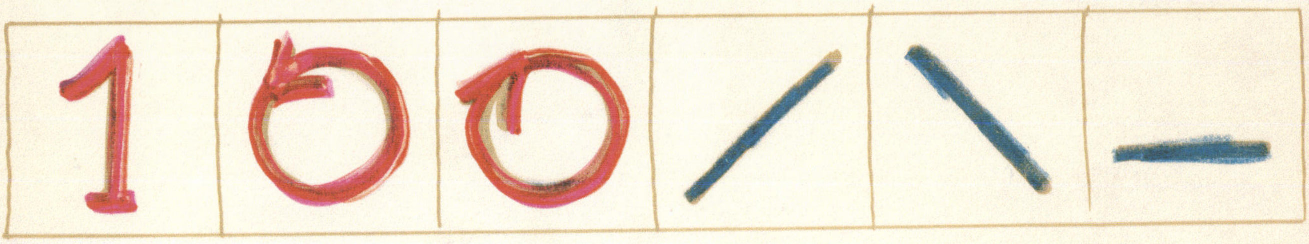
$\begin{pmatrix} a & b & c \\ r & s & t \end{pmatrix}$ est une transposition.



Ce dessin peut servir de patron



pour représenter les six permutation du Groupe symétique S_3



et donner sa table de composition et celle du sous-Groupe alterné

GROUPE SYMÉTRIQUE $\mathcal{S}_3, \circ$

∘	1	↺	↻	/	\	—
1	1	↺	↻	/	\	—
↻	↻	1	↺	—	/	\
↺	↺	↻	1	\	—	/
/	/	—	\	1	↺	↻
\	\	/	—	↻	1	↺
—	—	\	/	↺	↻	1

GROUPE ALTERNÉ $\mathcal{A}_3$

∘	1	↺	↻
1	1	↺	↻
↻	↻	1	↺
↺	↺	↻	1

Dans l'ensemble des cycles ordonnés d'un cycle
La relation "... a même sens que ..." est une
EQUIVALENCE à DEUX CLASSES.

Reste à prouver $\boxed{1}$ transitivité
$\boxed{2}$ l'équivalence est à deux classes.

Voici un triple A, X, U d'ordonnés du cycle G
(A, X, U sont distincts ou non)

Il existe trois points distincts $a, b, c \in G$ tels que

$$A = [a\,b\,c \qquad X = [x\,y\,z \qquad U = [u\,v\,w$$

$$\{a, b, c\} = \{x, y, z\} = \{u, v, w\}$$

*1

[a b c et [x y z ont même sens
et
[x y z et [u v w ont même sens

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3 \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3$$

[a b c et [u v w ont même sens

Transitivité

■ 1.

*2

$[x\,y\,z$ n'appartient pas à la même classe d'équivalence que $[a\,b\,c$
et
$[u\,v\,w$ n'appartient pas à la même classe d'équivalence que $[a\,b\,c$

$\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}$ est une transposition

$\wedge$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix}$ est une transposition

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3$$

$[x\,y\,z$ appartient à la même classe d'équivalence que $[u\,v\,w$

■ 2.

■

Pour tout cycle C

SENS

||

classe d'équivalence de la relation

... A MÊME SENS QUE ...

définie dans l'ensemble des cycles ordonnés de C

Dans tout cycle C

Deux cycles ordonnés qui ne sont pas de même sens sont encore dits de sens OPPOSÉS.

Tout cycle a deux sens

Tout ordre d'un cycle appartient à un et un seul de ses sens

... définit un de ses sens.

Tout point d'un cycle est minimum de deux cycles ordonnés de sens opposés.

Pour tout cycle UN SENS Σ et UN POINT a définissent un cycle ordonné :

le cycle ordonné de minimum a et de sens Σ

CYCLE ORIENTÉ $=$ CYCLE MUNI D'UN de ses SENS

Le cycle C orienté par le sens Σ est noté C, Σ

CYCLE POINTÉ $=$ cycle muni d'un de ses points

Par abus de langage

CYCLE ORIENTÉ POINTÉ $=$ CYCLE ORDONNÉ

■

Voici un arc fermé J d'extrémités a, b, sous-espaces du cycle orienté C, Σ

Tous les cycles ordonnés de Σ de minimum a ou b induisent même ordre sur J.

Tout cycle orienté C, Σ ordonne tous ses sous arcs fermés
tous ses sous arcs ouverts

a, b points distincts du cycle orienté C, Σ

$\overset{\frown}{ab}$ $=$ arc fermé de C ordonné par Σ de manière telle que $a < b$

$]\overset{\frown}{a\ b}[$ $=$ arc ouvert de C que Σ ordonne par $a < b$.