15 ENROULEMENTS

Pour toute application $f : E, \tau \longrightarrow F, \mathcal{U}$
d'espaces topologiques

$\boxed{f \text{ OUVERTE}} \;=\; \boxed{\forall T \in \tau \qquad fT \in \mathcal{U}}$

$\boxed{f \text{ HOMEOLOCAL}} \;=\; \boxed{\begin{array}{l} \forall x \in E \;—\; \exists T \in \tau \;— \\ fT \in \mathcal{U} \qquad f \circ 1_T : T \longrightarrow fT \text{ homéo} \end{array}}$

ENROULEMENT

‖

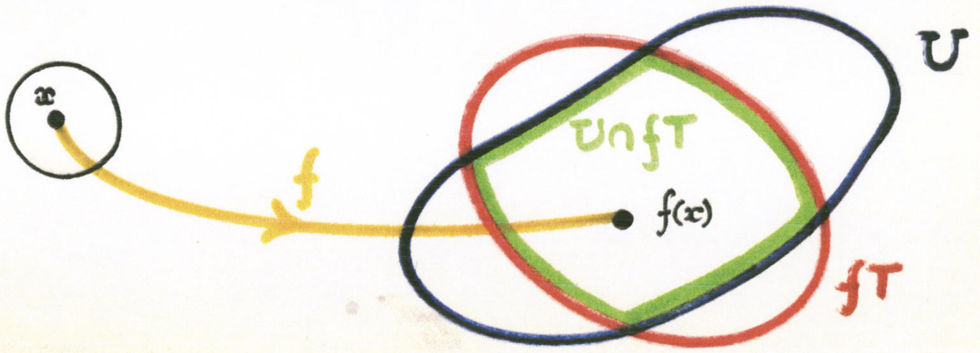
Homéolocal d'arc ouvert ou de cycle SUR cycle

Tout homéolocal (et en particulier tout enroulement) est une application continue et ouverte.

*1 $\forall x \in E$

$\triangleright\; T \in \tau_x \qquad fT \in \mathcal{U}$

$f \circ 1_T : T \longrightarrow fT \quad$ homéo



$\forall U \in \mathcal{U}_{f(x)}$ $\quad U \cap fT$ ouvert de fT

$f \circ 1_T$ continue $\quad f^{-1}(U \cap fT)$ ouvert de T

or T ouvert de E

$f^{-1}(U \cap fT)$ ouvert de E

f continue.

*2 $\quad \forall O$ ouvert de E

$\forall x \in O \quad \triangleright \; T_x \in \mathcal{T}$

$$O = \bigcup \{ T_x \mid x \in O \}$$

$$fO = f \bigcup \{ T_x \mid x \in O \}$$

$$= \bigcup \{ fT_x \mid x \in O \}$$

or les $fT_x \in \mathcal{U}$

$fO \in \mathcal{U}$

f ouverte.

e enroule A sur G

si

tout point x de A appartient à un arc ouvert X sous espace de A tel que la restriction de e à X soit un homéo $X \longrightarrow eX$

eX est un arc ouvert sousespace de G et la restriction de e à X une bijection monotone $X \longrightarrow eX$

<u>En bref</u>: Tout enroulement est monotone strict au voisinage de tout point du domaine.

En précisant ce résultat, le théorème ci-dessous établit que la définition d'enroulement comme homéo local correspond bien à la notion intuitive

□ Tout enroulement d'arc ouvert ordonné ou de cycle orienté A sur le cycle orienté G est strictement croissant au voisinage de tout point du domaine ou strictement décroissant au voisinage de tout point du domaine

▲ Dans la première éventualité l'enroulement est dit CROISSANT
Dans la seconde, il est dit DECROISSANT.

▲ e croit strictement au voisinage $x \in A$

▲ $y \in A$

▲ **F** arc fermé d'extrémités x, y sous-espace de A

▲ Tout point z de **F** appartient à un arc ouvert **S**, sous-espace de A tel que la restriction de e à **S** soit une bijection monotone de **S** sur l'arc ouvert **eS** sous-espace de $\mathcal{C}$

L'orientation ou l'ordre de A ordonne chacun des **S** et l'orientation de $\mathcal{C}$ ordonne les e**S**

▲ $\mathcal{C} = \{$ **S** | $z \in$ **F** et la restriction de e à **S** est strictement croissante $\}$

$\mathcal{D} = \{$ **S** | $z \in$ **F** et la restriction de e à **S** est strictement décroissante $\}$

* $x \in \bigcup \mathcal{C}$

$\bigcup \mathcal{C}$ est un ouvert non vide de A

$\bigcup \mathcal{D}$ est un ouvert de A

Les ouverts $\bigcup \mathcal{C}$ et $\bigcup \mathcal{D}$ sont disjoints

$F \subset \bigcup \mathcal{C} \cup \bigcup \mathcal{D}$

F connexe $\qquad \bigcup \mathcal{D} = \emptyset$

$\mathcal{D} = \emptyset$

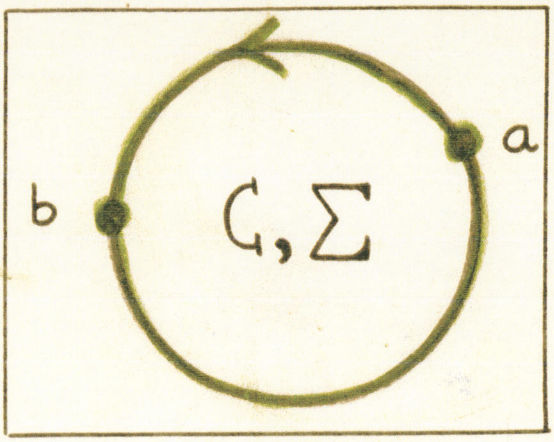
e croit en y

■

Nous allons construire des enroulements sur le cycle C

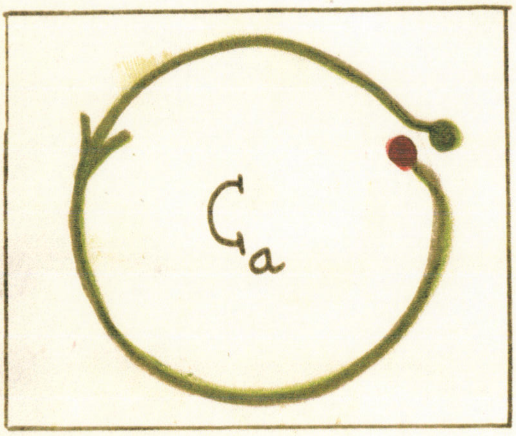
▲ Σ est l'un des sens de C

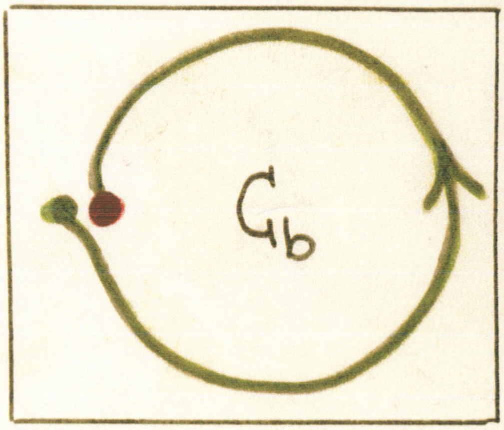
▲ a, b sont des points distincts de C



▲ C_a le cycle ordonné de sens Σ et de minimum a

▲ C_b le cycle ordonné de sens Σ et de minimum b





▲ U, V les arcs ouverts, composantes connexes de $C \setminus \{a, b\}$

Les cycles ordonnés de même sens C_a, C_b induisent même ordre sur chacun des arcs ouverts U, V

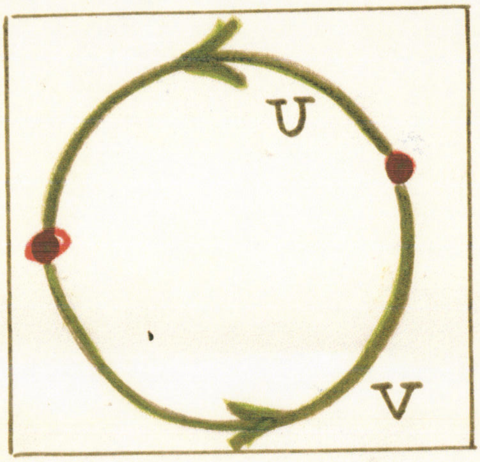
▲ $G\setminus\{a\}$ épointé ordonné de G_a

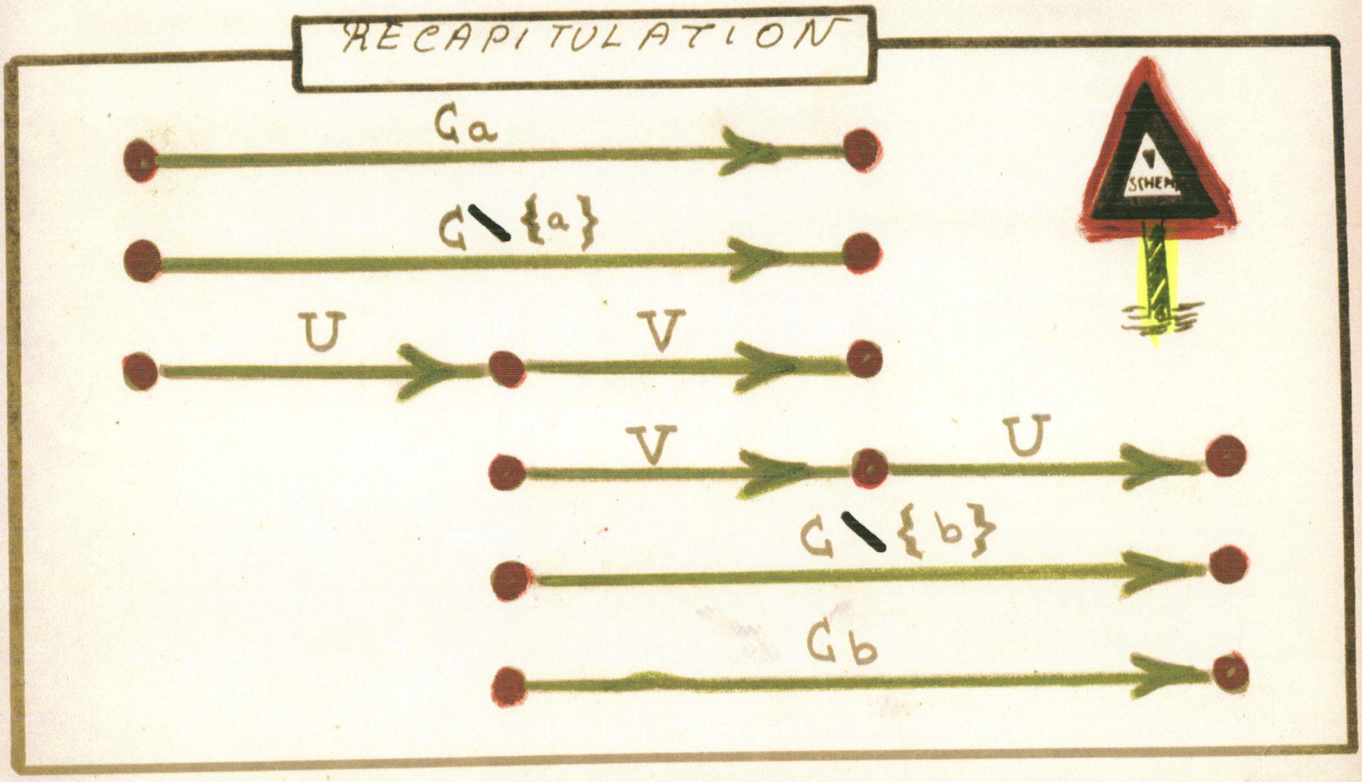
▲ $G\setminus\{b\}$ épointé ordonné de G_b

$$U \cup V = (G\setminus\{a\}) \cap (G\setminus\{b\}) = G\setminus\{a,b\}$$

Les épointés ordonnés $G\setminus\{a\}$ et $G\setminus\{b\}$ induisent même ordre sur chacun des arcs ouverts U, V

▲ U ordonné par a < b (et donc) V ordonné par b < a





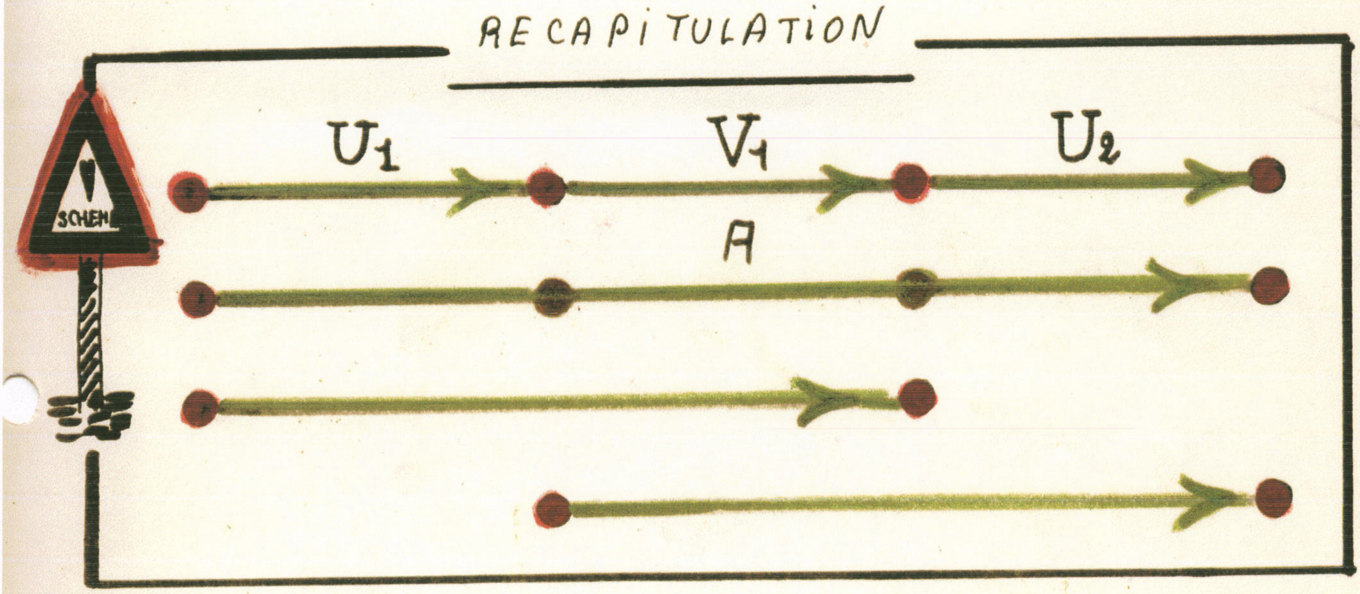
Aménageons le territoire de l'arc ouvert que l'on enroulera sur le cycle $\mathcal{C}$

▲ $A, \leqslant$ arc ouvert ordonné et $c, d \in A$ tels que $c < d$

▲ $U_1 = \{x \in A \mid x < c\}$

$V_1 =]c, d[$, $U_2 = \{x \in A \mid x > d\}$

$\{(U_1 \cup \{c\} \cup V_1), (V_1 \cup \{d\} \cup U_2)\}$ est un recouvrement ouvert de A



▲ bijections croissantes $f_1 : U_1 \longrightarrow U$

$g_1 : V_1 \longrightarrow V$

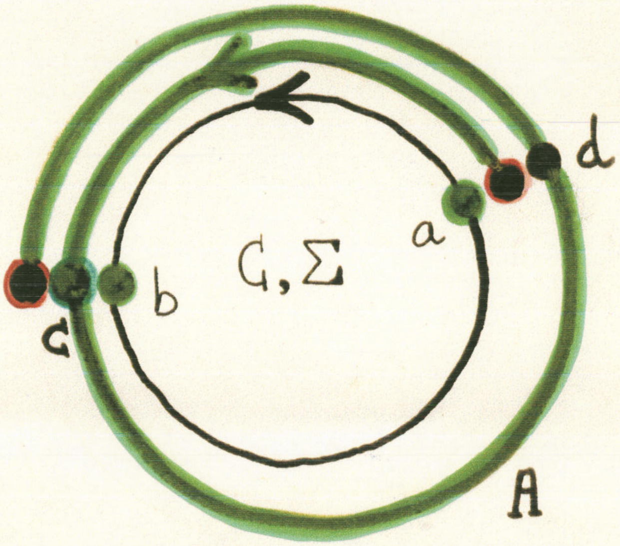
$f_2 : U_2 \longrightarrow U$

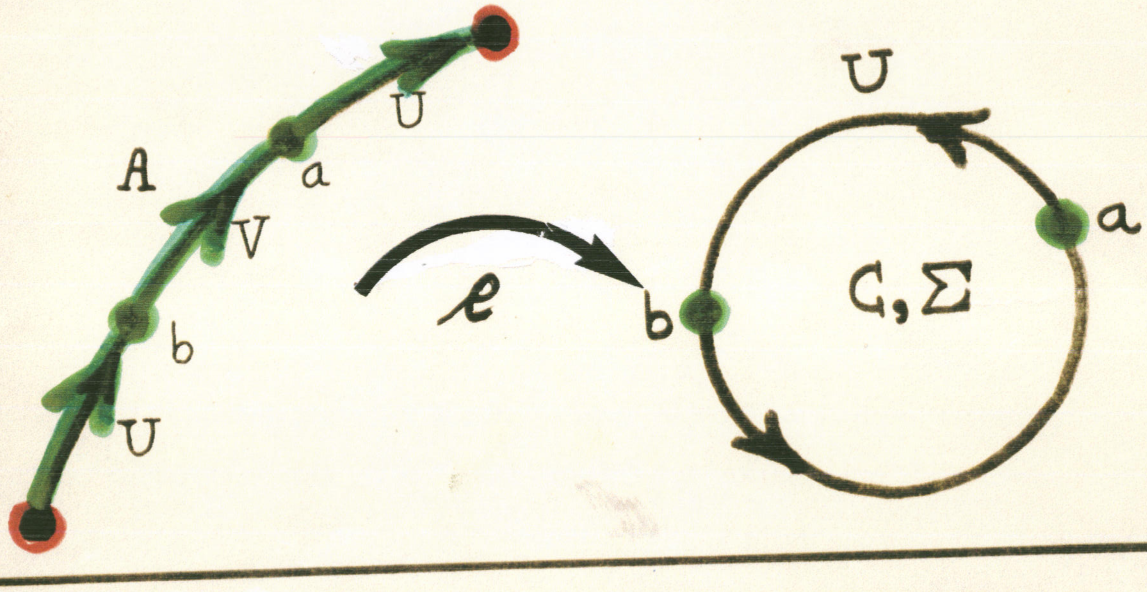
▲ $e = f_1 \cup \{(c,b)\} \cup g_1 \cup \{d,a\} \cup f_2$

e est un enroulement croissant $A, \leq \longrightarrow G, \Sigma$

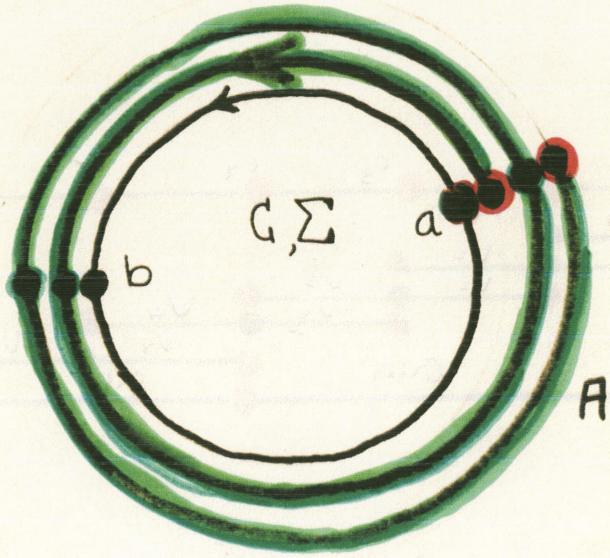
$\forall y \in G \quad : \quad e^{-1}\{y\}$ est un singleton ou une paire

Deux manières de schématiser cet enroulement

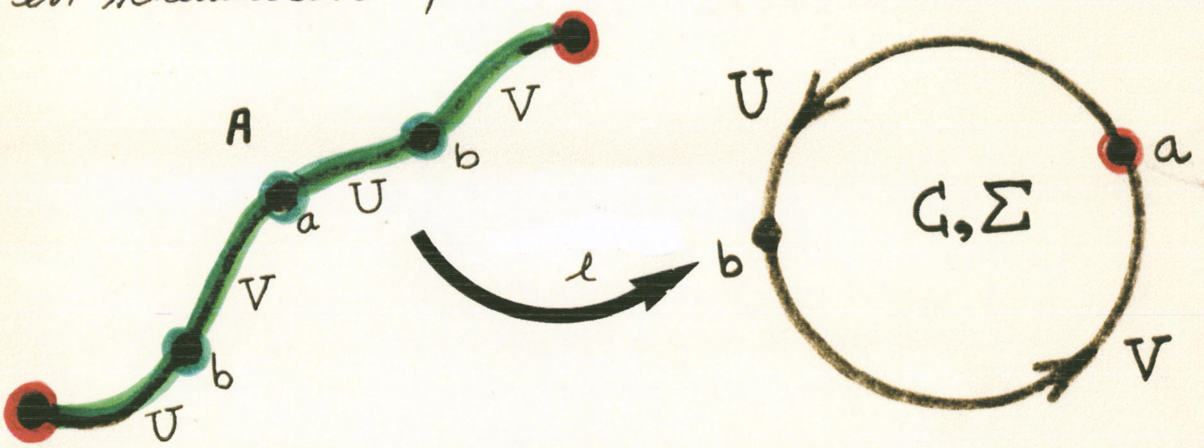




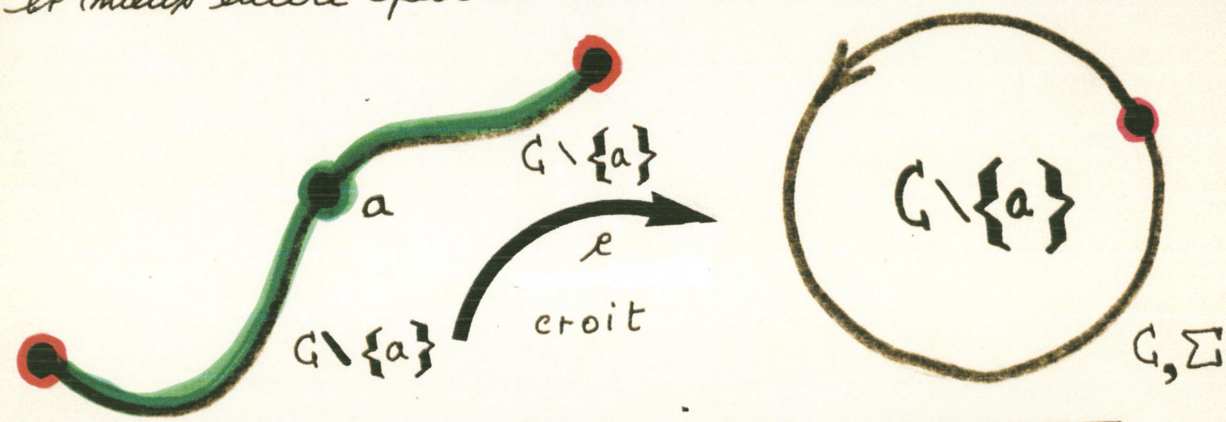
L'enroulement croissant



est schématisé par

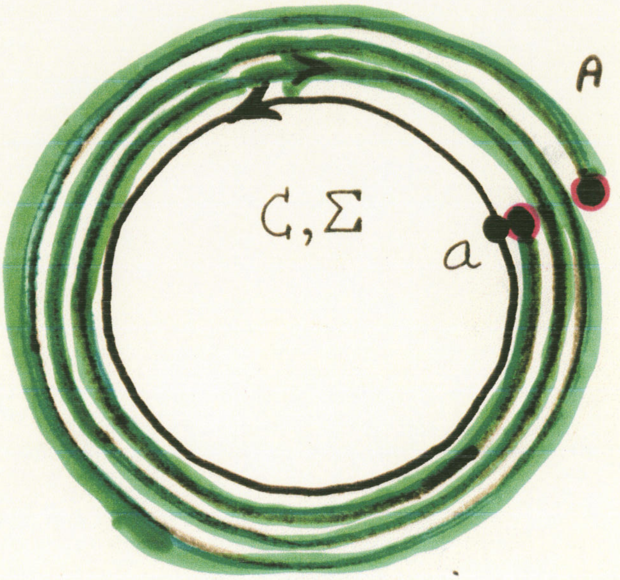


et mieux encore par

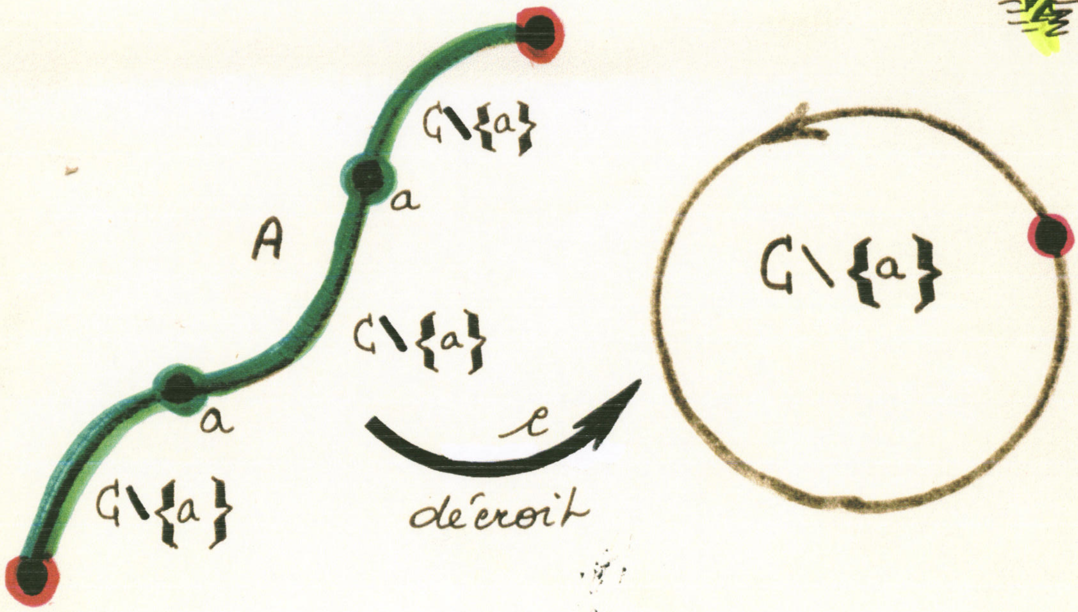


$\forall y \in G\setminus\{a\} \; : \; \# e^{-1}\{y\} = 2 \qquad \# e^{-1}\{a\} = 1$

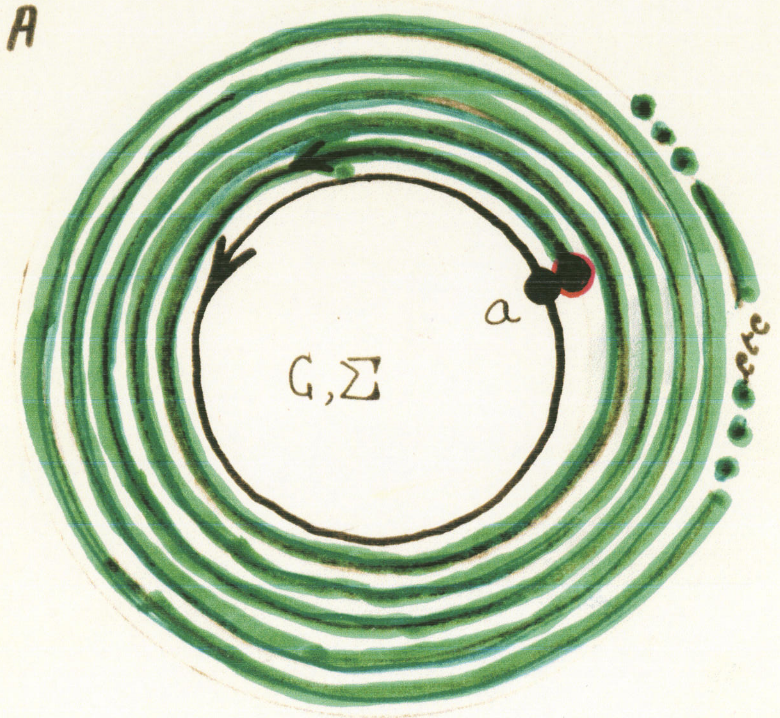
L'enroulement décroissant $e : A, \leqslant \longrightarrow C, \Sigma$



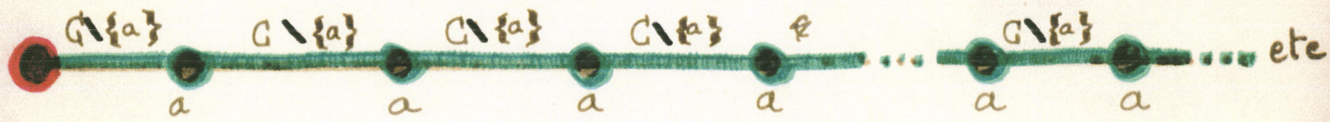
est schématisable par

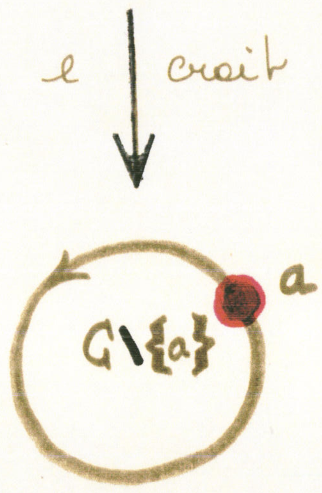


$\forall y \in C\setminus\{a\} : \# e^{-1}\{y\} = 3 \qquad \# e^{-1}\{a\} = 2$



Enroulement croissant $e: A, \ll \;\longrightarrow G, \Sigma$
schématisable par





tel que $\forall y \in G \quad e^{-1}\{y\}$ est dénombrable minimé, non maximé et discret.

Pour tout arc ouvert ordonné A et tout cycle orienté C

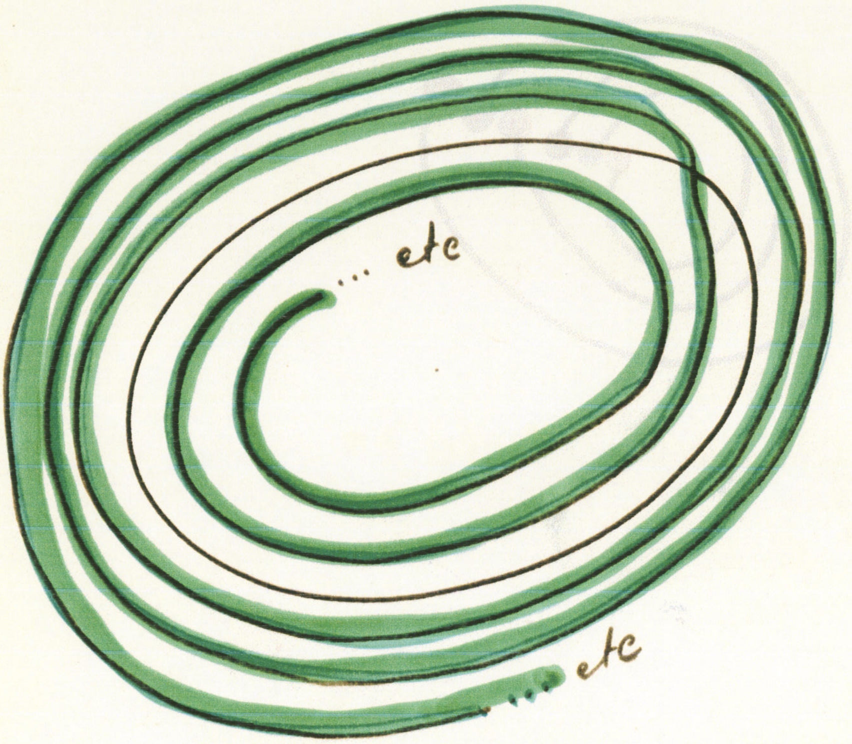
Il existe

- des enroulements croissants $A \rightarrow C$ tels que l'image réciproque de tout singleton de C soit dénombrable, minimée et non maximée
- des enroulements croissants $A \rightarrow C$ tels que l'image réciproque de tout singleton de C soit dénombrable, maximée et non minimée
- des enroulements décroissants $A \rightarrow C$ tels que l'image réciproque de tout singleton de C soit dénombrable, maximée et non minimée
- des enroulements décroissants $A \rightarrow C$ tels que l'image réciproque de tout singleton de C soit dénombrable, minimée et non maximée.

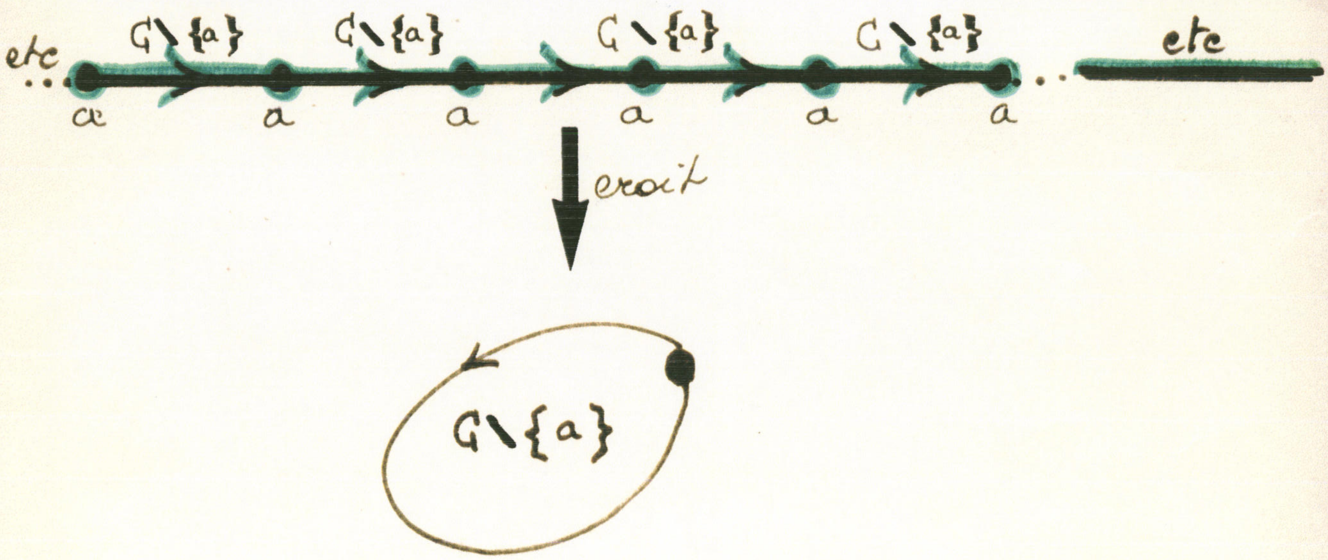
Mais il existe aussi

- des enroulements croissants $A \rightarrow C$ tels que l'image réciproque de tout singleton de C soit dénombrable, ni minimée ni maximée
- des enroulements décroissants $A \rightarrow C$ tels que l'image réciproque de tout singleton de C soit dénombrable ni maximée, ni minimée.

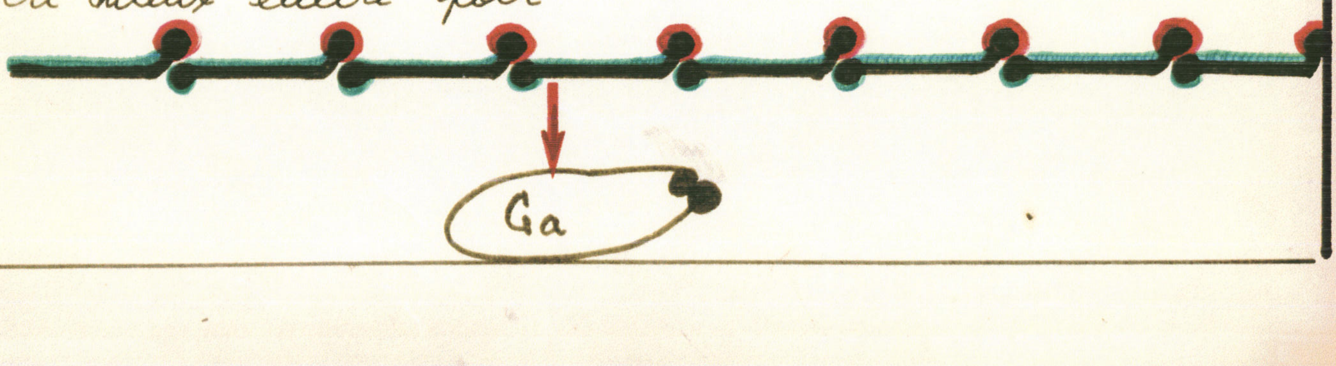
Cet enroulement croissant $e : A, \leq \to$



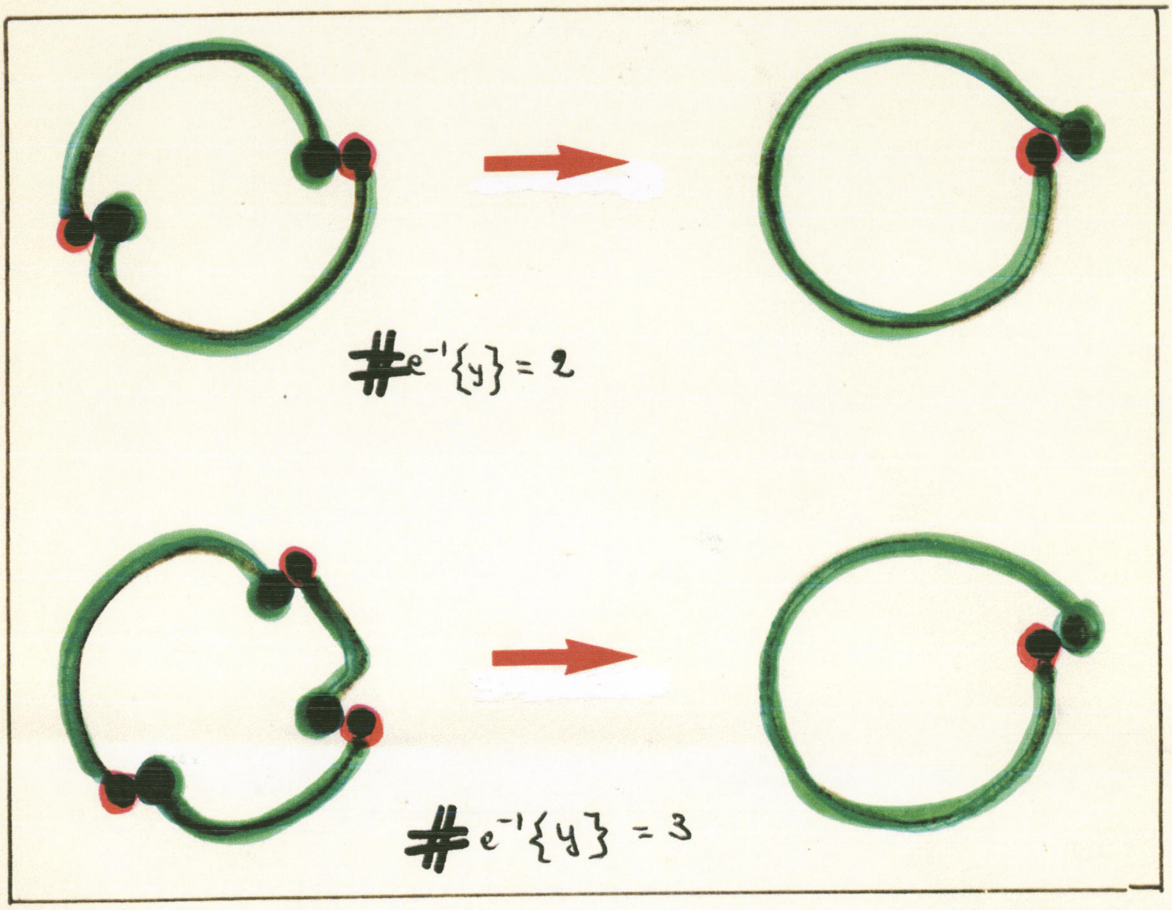
est schématisable par



ou mieux encore par



Très rapidement décrits, voici des enroulements de cycles sur cycles.



□ Toute symétrie orthogonale dont l'axe comprend le centre d'un cercle est un enroulement décroissant du cercle sur lui-même ■

□ Pour tout couple de cycles orientés C_1, C_2 et pour tout $n \in \omega_0$, il existe des enroulements croissants et décroissants de C_1 sur C_2 et tels que l'image réciproque de tout point de C_2 comprenne exactement n points de C_1 ■

Si f est un homéolocal $E, \tau \longrightarrow F, \mathcal{U}$ et $y \in F$

Alors le sous-espace $f^{-1}\{y\}$ de E, τ est discret

Pour $y \notin fE$ la proposition est triviale

$y \in fE$

* $x \in f^{-1}\{y\}$

$x \in T \in \tau$

la restriction $f \circ 1_T$ de f à T

est un homéo $T \longrightarrow fT$

la restriction de f à T est injective

$x \in T \cap f^{-1}\{y\}$

$T \cap f^{-1}\{y\} = \{x\}$

$T \cap f^{-1}\{y\}$ est ouvert

$\{x\}$ est ouvert

$f^{-1}\{y\}$, $\tau_{f^{-1}\{y\}}$ est discret

Si f est un homéolocal d'un compact K, τ
dans un HAUSDORFF $H, \mathcal{U}$
Alors l'image réciproque par f
de tout élément de H est finie

Pour $y \notin fK$ la proposition est vraie

$y \in fK$

* H HAUSDORFF

$\{y\}$ fermé

f homéolocal

1. f continue

$f^{-1}\{y\}$ fermé du compact K

$f^{-1}\{y\}$ compact

2. $f^{-1}\{y\}$ sous-espace discret de K

$f^{-1}\{y\}$ compact discret

$f^{-1}\{y\}$ FINI

On peut enrouler une infinité de fois
un arc ouvert sur un cycle

Un cycle ne s'enroule qu'un nombre FINI
de fois sur un cycle.