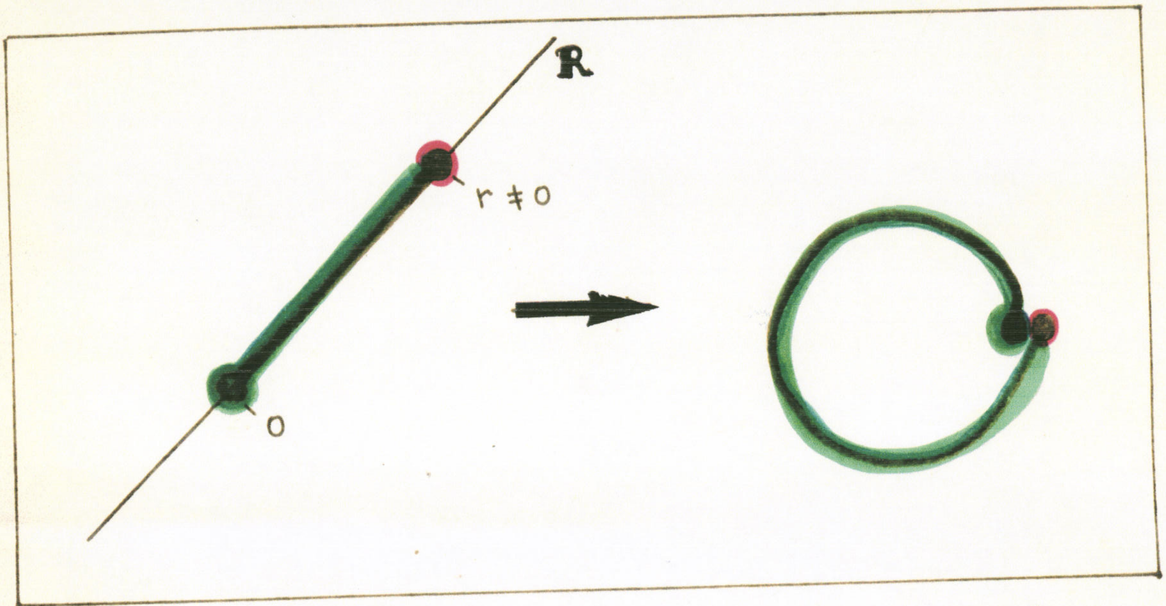
17 ENROULEMENTS PÉRIODIQUES

En prolongeant à $\mathbf{R}$ par périodicité toute bijection croissante



de $[0, r[\subset \mathbf{R}^+$ sur un cycle ordonné

on obtient un ENROULEMENT PERIODIQUE de $\mathbf{R}$ sur le cycle

□ Il existe des enroulements périodiques de $\mathbf{R}$ sur tout cycle
L'image réciproque de tout singleton (inclus dans le cycle) par un enroulement périodique est un ensemble dénombrable ni minimé ni maximé ■

▲ e : enroulement $\mathbf{R} \to C$, de période $r \in \mathbf{R}_0^+$

$\forall x \in \mathbf{R}$: $e^{-1}\{e(x)\} = x + r\mathbf{Z}$

φ : $e(x) \longmapsto x + r\mathbf{Z}$ est une bijection

$C \longrightarrow \mathbf{R}/_r\mathbf{Z}$

La réciproque φ^{-1} de la bijection φ (définie par e et dépendant de e) transporte sur C la loi de Groupe de $\mathbf{R}/_r\mathbf{Z}$

l'enroulement e érige C en groupe commutatif $C, +_e$ isomorphe à $\mathbf{R}/_r\mathbf{Z}$ ▲

1 Quand aucune confusion n'en résulte, on notera parfois $+$ la loi $+_e$ définie par l'enroulement périodique e.

L'enroulement périodique e sur le cycle C érige celui-ci en un groupe $C, +_e$ isomorphe au groupe des réels modulo un.

L'enroulement périodique e, composé des morphismes.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R}, + & \longrightarrow & \mathbf{R}/_r\mathbf{Z}\ + & \longrightarrow & C, +_e \\ x & \longmapsto & x + r\mathbf{Z} & \longmapsto & e(x) \end{array}$$

est un épimorphisme $\mathbf{R}, + \longrightarrow C, +_e$

Pour tout enroulement de période r sur le cycle $\mathcal{C}$
la formule

$$\forall x, y \in \mathbf{R}$$

$$e(x) +_e e(y) = e(x+y)$$

érige $\mathcal{C}$ en le groupe $\mathcal{C}, +_e$ isomorphe à
celui des réels modulo un
(... et e est un épimorphisme $\mathbf{R}, + \to \mathcal{C}, +_e$)

Groupes Topologiques

$G, \star, m$ un Groupe
τ une topologie sur G

$G, \star, m, \tau$
est un GROUPE TOPOLOGIQUE
ssi
les applications
$\star : G \times G \longrightarrow G : (x, y) \longmapsto x \star y$
$^{-1} : G \longrightarrow G : x \longmapsto x^{-1}$
sont continues

Ex 1. $G, \star, m, \{\phi, G\}$ est groupe topologique
2. $G, \star, m, \mathcal{P}_G$ est groupe topologique DISCRET
3. $\mathbb{R}, +, 0, \tau_{us}$ est groupe topologique
4. $\mathbb{R}_0, \cdot, 1, \tau_{us}$ est groupe topologique

$G, \star, m, \tau$ est un groupe topologique
ssi
$G \times G \longrightarrow G : (x, y) \longmapsto x \star y^{-1}$
est continue

$\ast \Downarrow$ trivial
$\ast \Uparrow$ $(m, y^{-1}) \longmapsto m \star y^{-1} = y^{-1}$ continue
$(x, y^{-1}) \longmapsto x \star (y^{-1})^{-1} = x \star y$ continue

Si $G, \star, m, \tau$ est un Groupe Topologique
Alors les multiplications Cayléennes

gauche $g\star : G \longrightarrow G : x \longmapsto g \star x$
droite $\star g : G \longrightarrow G : x \longmapsto x \star g$

sont bijections continues de G, τ dans G, τ
iso de $G, \star, m$ dans $G, \star, m$
AUTOS de $G, \star, m, \tau$

En groupe topologique $G, \star, m, \tau$
la prise de l'inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est un AUTO

En groupe Topologique $G, \star, m, \tau$

Si O est un OUVERT (FERMÉ) de G, τ
Alors $\forall x \in G$

$$x \star O = \{x \star y \mid y \in O\}$$
$$O \star x = \{y \star x \mid y \in O\}$$
$$O^{-1} = \{y^{-1} \mid y \in O\}$$

sont OUVERTS (FERMÉS) de G, τ

Si O est un OUVERT de G, τ
Alors $\forall P \subset G$

$$P \star O = \{p \star x \mid p \in P \quad x \in O\}$$
$$= \bigcup_{p \in P} \{p \star x \mid x \in O\}$$
$$= \bigcup_{p \in P} p \star O$$ est réunion d'ouverts de G, τ

est un OUVERT de G, τ

Un groupe topologique $G, \star, n, \mathcal{T}$

Si V est voisinage du neutre n de $G, \star, n$
Si P est partie NON vide de G
Alors $V \star P$, $P \star V$ contiennent des ouverts contenant P
sont des voisinages de tout élément de P.

Pour tout voisinage V de $g \in G$
Pour tout élément h de G
$h \star V$ est voisinage de $h \star g$
$V \star h$ est voisinage de $g \star h$

Pour tout voisinage V du neutre n de G
Pour tout élément h de G
$h \star V$, $V \star h$ sont voisinages de h

Pour tout voisinage W de h élément de G
$h^{-1} \star W$, $W \star h^{-1}$ sont voisinages du neutre n

---

La connaissance de l'ensemble des voisinages $\mathcal{V}_n$ du neutre n de G
entraîne
la connaissance de l'ensemble des voisinages $\mathcal{V}_g$ de TouT élément g de G

d'où la nouvelle définition de groupe topologique en terme de voisinages du neutre n

$G, \star, n, \tau$ est un GROUPE TOPOLOGIQUE

ssi

$$\forall U \in \mathcal{V}_n \quad \exists V \in \mathcal{V}_n \qquad V \star V \subset U$$
$$\forall U \in \mathcal{V}_n \qquad\qquad U^{-1} \in \mathcal{V}_n$$

le groupe topologique $G, \star, n, \tau$

est SÉPARÉ de HAUSDORFF

ssi

le singleton $\{n\}$ du neutre est FERMÉ

$\Downarrow$ Trivial

$\Uparrow$ $f : G \times G \longrightarrow G : (x, y) \longmapsto x \star y^{-1}$ est continue

$f^{-1}\{n\}$ fermé

$$f^{-1}\{n\} = \{(x,y) \in G \times G \mid x \star y^{-1} = n\}$$
$$= \{(x,y) \in G \times G \mid x = y\} = \Delta$$

$\forall x, y \in G \quad x \neq y \qquad (x, y) \notin \Delta = \operatorname{adh} \Delta$

(x, y) n'adhère PAS à Δ

$$\exists W \in \mathcal{V}_{(x,y)} \qquad W \cap \Delta = \phi$$

$$\exists U \in \mathcal{V}_x \quad \exists V \in \mathcal{V}_y \qquad U \times V \subset W$$

$$\exists U \in \mathcal{V}_x \quad \exists V \in \mathcal{V}_y \quad (U \times V) \cap \Delta \subset W \cap \Delta = \phi$$
$$\exists U \in \mathcal{V}_x \quad \exists V \in \mathcal{V}_y \quad (U \times V) \cap \Delta = \phi$$
$$\exists U \in \mathcal{V}_x \quad \exists V \in \mathcal{V}_y \qquad U \cap V = \phi$$

$\square$

Si $G, \mathcal{T}, *$ est un groupe topologique

$H, *$ est un groupe et $H, \mathcal{U}$ un espace topologique

$f : G, * \longrightarrow H, *$ un épimorphisme de groupes

$f : G, \mathcal{T} \longrightarrow H, \mathcal{U}$ un homeo local surjectif

Alors $H, \mathcal{U}, *$ est un groupe topologique

▲ $u, v \in H \quad \wedge \quad u * v^{-1} \in W \in \mathcal{U}$

□ $\exists\, U, V \in \mathcal{U} \quad u \in U \wedge v \in V \wedge U * V^{-1} \subset W$

* ▲ $x, y \in G \wedge f(x) = u \wedge f(y) = v$

f est morphisme continu

$$x * y^{-1} \in f^{-1} W \in \mathcal{T}$$

$G, \mathcal{T}, *$ est un groupe topologique

▲ $x \in X \in \mathcal{T} \wedge y \in Y \in \mathcal{T} \wedge X * Y^{-1} \subset f^{-1} W$

f est un homeo local et un morphisme

$u \in fX \in \mathcal{U} \wedge v \in fY \in \mathcal{U} \wedge fX * (fY)^{-1} \subset W$

■

■

Tout enroulement périodique e de $\mathbf{R}$ sur le cycle $C, \mathcal{T}_{us}$ érige celui-ci en un

GROUPE TOPOLOGIQUE

$$C, \mathcal{T}_{us}, +_e$$

■

▲ L'enroulement $e : \mathbf{R} \longrightarrow C, \tau_{us}$ est de période s

L'isomorphisme de groupes

$$C, +_e \longrightarrow \mathbf{R}/s\mathbf{Z}, + :$$
$$e(x) \longmapsto x + s\mathbf{Z}$$

transporte la topologie usuelle τ_{us} du cycle C sur le groupe $\mathbf{R}/s\mathbf{Z}, +$ et érige celui-ci en un groupe topologique.

Pour décrire la topologie de cycle ainsi construite grâce à l'enroulement e sur l'ensemble $\mathbf{R}/s\mathbf{Z}$, nous utilisons le modèle parfait $[0, s[$ (où tout $x \in [0, s[$ représente le réel modulo s $x + s\mathbf{Z}$)

En vertu même de la définition de e

$$\{]a, b[, [0, s[\setminus [a, b] \mid a, b \in [0, s[\}$$

est une base de cette topologie

Bien que construite à l'aide de l'enroulement e, cette topologie est indépendante de e.

Entièrement définie par $\mathbf{R}/s\mathbf{Z}$ lui-même, cette topologie prend le nom de

TOPOLOGIE NATURELLE de $\mathbf{R}/s\mathbf{Z}$

et sera parfois notée τ_{us}

Tous les GROUPES TOPOLOGIQUES $\mathbf{R}/s\mathbf{Z}, +, \tau_{us}$
sont isomorphes au
GROUPE TOPOLOGIQUE DES REELS MODULO UN
$\mathbf{R}/\mathbf{Z}, +, \tau_{us}$

$\mathbf{R}/\mathbf{Z}, \tau_{us}$ est le PROTOTYPE de tous les CYCLES.

Dans le groupe topologique des réels modulo un

Tout voisinage de tout réel modulo un contient un ensemble dénombrable de rationnels modulo un et un ensemble continu d'irrationnels modulo un.

Ce résultat donne un relief tout particulier à ce théorème du 16

Dans le groupe des réels modulo un

RATIONNEL = D'ORDRE FINI

qui souligne une différence "macroscopique" "in the large" entre rationnels et irrationnels modulo un bien qu'ils soient "sur le plan microscopique local" intimement et infiniment mêlés.

Pour tout enroulement périodique e sur un cycle C

la formule

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$e(x) +_e e(y) = e(x+y)$$

munit le cycle C d'une loi $+_e$ qui l'érige en un groupe topologique isomorphe à celui des réels modulo un.

... et l'enroulement e est un épimorphisme continu du groupe topologique des réels sur $C, +_e, \tau_{us}$

EX L'ensemble de toutes les parties représentées par

celles ne comprenant pas 0 celles comprenant 0

constitue une base de topologie sur $[0,1[$

EX

BLASON

ouvert ne comprenant pas 0 ouvert comprenant 0

$[0,1[\,,\ \mathcal{T}_{cycle}$

Pour justifier la notation $\mathcal{T}_{cycle}$ il s'agit de montrer que

EX □ $[0,1[\,,\ \mathcal{T}_{cycle}$ est cycle

▶ Enroulement périodique de période 1

$$e : \mathbb{R}, \mathcal{T}_{us} \longrightarrow \mathbb{C}, \mathcal{T}_{us}$$

✱ e est encore épi de groupes de noyau $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{R}, + \longrightarrow \mathbb{C}, +_e$$

⊢ e se factorise donc à travers la projection canonique

$$\mathbb{R} \longrightarrow [0,1[$$

qui envoie tout réel sur sa partie décimale .

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, "\text{projection canonique}"] & \\
\mathbb{C} & {[0,1[} \arrow[l, "\text{bijection}"]
\end{tikzcd}$$

* La bijection $[0,1[\to C$ est un homéo

$$[0,1[, \mathcal{T}_{cycle} \longrightarrow C, \mathcal{T}_{us}$$

car l'image de la base (définie plus haut) de $\mathcal{T}_{cycle}$ est une base de $\mathcal{T}_{us}$ ■

EX

Cycle $C, \mathcal{T}_{us}$

Les groupes topologiques

$$C, +_e, \mathcal{T}_{us} \qquad R/Z, +, \mathcal{T}_{us} \qquad [0,1[, \oplus, \mathcal{T}_{cycle}$$

sont isomorphes

Enroulement périodique e de $R, \mathcal{T}_{us}$ sur $C, \mathcal{T}_{us}$ ■

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{long} M \\
&= \sup \{ \operatorname{long} F \mid m \in F \in \mathcal{P}_f M \} \\
&= \sup \{ \operatorname{long} G \cup H \mid m \in G \in \mathcal{P}_f A \ \wedge \ m \in H \in \mathcal{P}_f B \} \\
&= \sup \{ \operatorname{long} G + \operatorname{long} H \mid m \in G \in \mathcal{P}_f A \ \wedge m \in H \in \mathcal{P}_f B \} \\
&= \sup \left(\{ \operatorname{long} G \mid m \in G \in \mathcal{P}_f A \} + \{ \operatorname{long} H \mid m \in H \in \mathcal{P}_f B \} \right) \\
&= \sup \{ \operatorname{long} G \mid m \in G \in \mathcal{P}_f A \} + \sup \{ \operatorname{long} H \mid m \in H \in \mathcal{P}_f B \} \quad \text{(cf. chap. 4, EX)} \\
&= \operatorname{long} A + \operatorname{long} B \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Si $M, \leqslant, d$ est un monotrique rectifiable

Alors $\tilde{d}(a,b) \triangleq \operatorname{long}_d [a,b]$

est une métrique sur M

($\tilde{d}$ est appelée la distance subordonnée à d selon la monotalie $\leqslant$. C'est la "distance mesurée le long du monotrique")

De plus

$$d \leqslant \tilde{d}$$

et

$$b \in [a,c] \Rightarrow \tilde{d}(a,c) = \tilde{d}(a,b) + \tilde{d}(b,c) \qquad \blacksquare$$

$M, \leqslant, d$ monotrique rectifiable

$$\Downarrow$$

$M, \leqslant, \tilde{d}$ monotrique rectifiable

Cela va résulter du résultat suivant :