18

ESPACES METRIQUES

Notre petite étude du plan topologique usuel

n'a utilisé que certaines des propriétés de la distance euclidienne **d**

... ce qui appelle une généralisation simple, mais de grande portée.

ESPACE METRIQUE E,d

= *Ensemble* E *muni d'une* DISTANCE d (sur E),

c'est-à-dire d'une fonction $d: E \times E \to \mathbf{R}^+$

telle que $\forall x,y,z \in E$

$$d(x,y) = d(y,x)$$

$d(x,y)=0$ *ssi* $x=y$

$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ (Inégalité triangulaire)

Les espaces métriques généralisent la définition de plan euclidien :

Le plan euclidien Π,**d** *est un (espace) métrique.*

Pour tout ensemble E , il existe une et une seule distance $E \times E \to \{0,1\}$.

Elle est appelée *distance binaire* sur E .

En espace métrique binaire : $d(x,y) = 1$ *ssi* $x \neq y$.

En espace métrique binaire, tout triangle strict est équilatéral.

Fabriquer une multitude d'espaces métriques.

SOUS-ESPACES METRIQUES

Il n'est pas vrai que toute partie du groupe G,$\star$ constitue un groupe pour la loi $\star$

Il n'est pas vrai que toute partie d'espace vectoriel V

joue à l'espace vectoriel, pour son propre compte, avec les lois de V .

Mais il est bien vrai que toute partie d'ordonné E,$\leq$ hérite une structure d'ordre.

□ *Toute partie* P *d'espace métrique* E,d

définit l'espace métrique P,d_P *par* $\forall x,y \in P$ $d_P(x,y) = d(x,y)$ ■

L'espace métrique P,d_P est dit *le sous-espace métrique de* E,d *défini par sa partie* P .

Par abus de notation, la surabondante écriture P,d_P se simplifie en P,d (voire en P) .

Les sous-espaces de Π,d enrichissent notre panoplie d'espaces métriques ...
puisque toute partie de Π nous en fournit un exemple.

En types de structures à ensemble principal et dont la définition ne comporte que des quantifications *universelles* restreintes à certains ensembles,
toute partie de l'ensemble principal définit une sous-structure (de même type) .

$E,\leq$ est un ordonné *ssi* $\forall x,y,z \in E$: ...

E,d est espace métrique *ssi* $\forall x,y,z \in E$: ...

Quantificateurs *existentiels* dans la définition des structures de groupe, d'espace vectoriel, de treillis ... .

En métrique, la distance généralise la "mesure de longueur" ... chère à certains enseignants

Commenter la réflexion *"Tout espace métrique fixe une unité de longueur"* .

Le métrique E,d et le réel positif strict r définissent le *métrique* E,rd .

Le passage de E,d à E,rd multiplie les distances par r
... et l'unité de longueur par $1/r$

Toute droite D du plan euclidien Π,d est un espace métrique.
Cette droite étant graduée en marquant 0 et a deux points de distance a :

$$\forall x,y \in D \qquad d(x,y) = |\text{abscisse de } x - \text{abscisse de } y|$$

BOULES ET SPHERES *en espace métrique*

En espace métrique E,d , pour tout point $c \in E$ et tout réel positif $r \in \mathbf{R}^+$:

$B(c,r) \triangleq$ BOULE OUVERTE de CENTRE c et de RAYON r $= \{ x \in E \quad d(c,x) < r \}$

$\bar{B}(c,r) \triangleq$ BOULE FERMEE de CENTRE c et de RAYON r $= \{ x \in E \quad d(c,x) \leq r \}$

$S(c,r) \triangleq$ SPHERE de CENTRE c et de RAYON r $= \{ x \in E \quad d(c,x) = r \}$

EX 95 $B(c,r) \subset \bar{B}(c,r) = B(c,r) \cup S(c,r)$ $\qquad S(c,r) \cap B(c,r) = \emptyset$

EX 96 $B(c,0) = \emptyset$ $\qquad \bar{B}(c,0) = S(c,0) = \{c\}$.

EX 97 En plan euclidien : Boule = Disque et Sphère = Cercle

EX 98 $c \in \bar{B}(c,r)$ $\qquad \forall r \in \mathbf{R}^+ \quad c \in B(c,r)$.

En métrique binaire

Toute boule de rayon non nul <1 est singletonne, et son seul point est son seul centre

L'espace est la seule boule fermée de rayon ≥ 1 . Chaque point en est un centre et chaque réel ≥ 1 un rayon .

Pour tout réel positif r différent de 0 et 1 : $B(c,r) = \bar{B}(c,r)$
tandis que : $B(c,1) = \{c\}$ et $\bar{B}(c,1) = E$.

Pour tous réels strictement positifs tels que $r \leq s$: $B(c,r) \subset B(c,s)$.

Pour tous réels strictement positifs tels que $r < s$: $B(c,r) \subset B(c,s)$
$\bar{B}(c,r) \subset B(c,s)$
$\bar{B}(c,r) \subset \bar{B}(c,s)$.

TOPOLOGIES METRIQUES

En plan euclidien : OUVERT = *Réunion de disques ouverts* (boules ouvertes du plan euclidien)
En espace métrique : OUVERT $\triangleq$ *Réunion de boules ouvertes* *(L'ensemble vide est ouvert!)*

Immédiatement

□ *Ouvert d'espace métrique* E = *Partie de* E *dont tout point appartient à une boule ouverte incluse dans* E ■

□ *Ouvert d'espace métrique* E = *Partie de* E *dont tout point est centre d'une boule ouverte non vide incluse dans* E ■

EX 102 La première des deux caractérisations ci-dessus parle de *boule ouverte* et la seconde de *boule ouverte non vide*. Pourquoi ?

□ *L'ensemble* $\mathcal{T}_d$ *des ouverts du métrique* E,d *est une topologie.*

On doit prouver □ *L'intersection de toute paire d'ouverts est ouverte*

▸ $X_0, X_1 \in \mathcal{T}_d$ et $x \in X_0 \cap X_1$

▸ x est centre des boules ouvertes non vides $B_0 \subset X_0$ et $B_1 \subset X_1$

✱ x est centre de la boule ouverte

$$B_0 \cap B_1 \subset X_0 \cap X_1$$

D'où $X_0 \cap X_1 \in \mathcal{T}_d$ ■

□ *La réunion de tout ensemble d'ouverts est ouverte*

▸ $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}_d$

• Si $\cup\mathcal{P} = \emptyset$,pas de problème: $\cup\mathcal{P} = \emptyset \in \mathcal{T}_d$

• Supposons donc $\cup\mathcal{P} \neq \emptyset$

▸ $x \in \cup\mathcal{P}$

▸ $x \in P \in \mathcal{P} \subset \mathcal{T}_d$ donc $x \in P \in \mathcal{T}_d$

✱ x est centre d'une boule ouverte non vide incluse dans P et donc incluse dans $\cup\mathcal{P}$

D'où $\cup\mathcal{P} \in \mathcal{T}_d$ ■

EX 103 En Π,**d** : $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{us}$ (Cf. p.22)

Tout métrique M,d définit sa topologie $\mathcal{T}_d$ parfois notée $\mathcal{T}_M$.

On adopte la notation qui, dans le contexte du moment, ne donne pas lieu à ambiguité.
Ecrivons donc ici $\mathcal{T}_d$.

> $U \in \mathcal{T}_d$
>
> SSI
>
> Tout point de U est centre d'une boule ouverte non vide incluse dans U

On peut montrer (cf A8) qu'il existe des topologies *non métriques*
(c'est-à-dire : *non définissables par un espace métrique*)

Ce fait conseille l'étude des espaces topologiques en eux-mêmes
sans référence à d'éventuelles distances définissantes.
Une telle théorie, strictement plus générale que celle des topologies métriques,
s'applique évidemment à celles-ci.

Même en ces cas particuliers, se passer de la distance simplifie souvent la situation.

TAXIMETRIE PLANE

La distance pour le piéton en la ville d'*Orthopolis*,
dont toutes les avenues sont parallèles et perpendiculaires aux rues,
érige le plan en un authentique espace métrique.

(On suppose que la ville s'étend sur tout le plan
et qu'en tout point passent une rue et une avenue.)

Cette distance souvent notée t est appelée TAXIDISTANCE
et le plan muni de la taxidistance est dit TAXIMETRIQUE.

TAXI PLAN

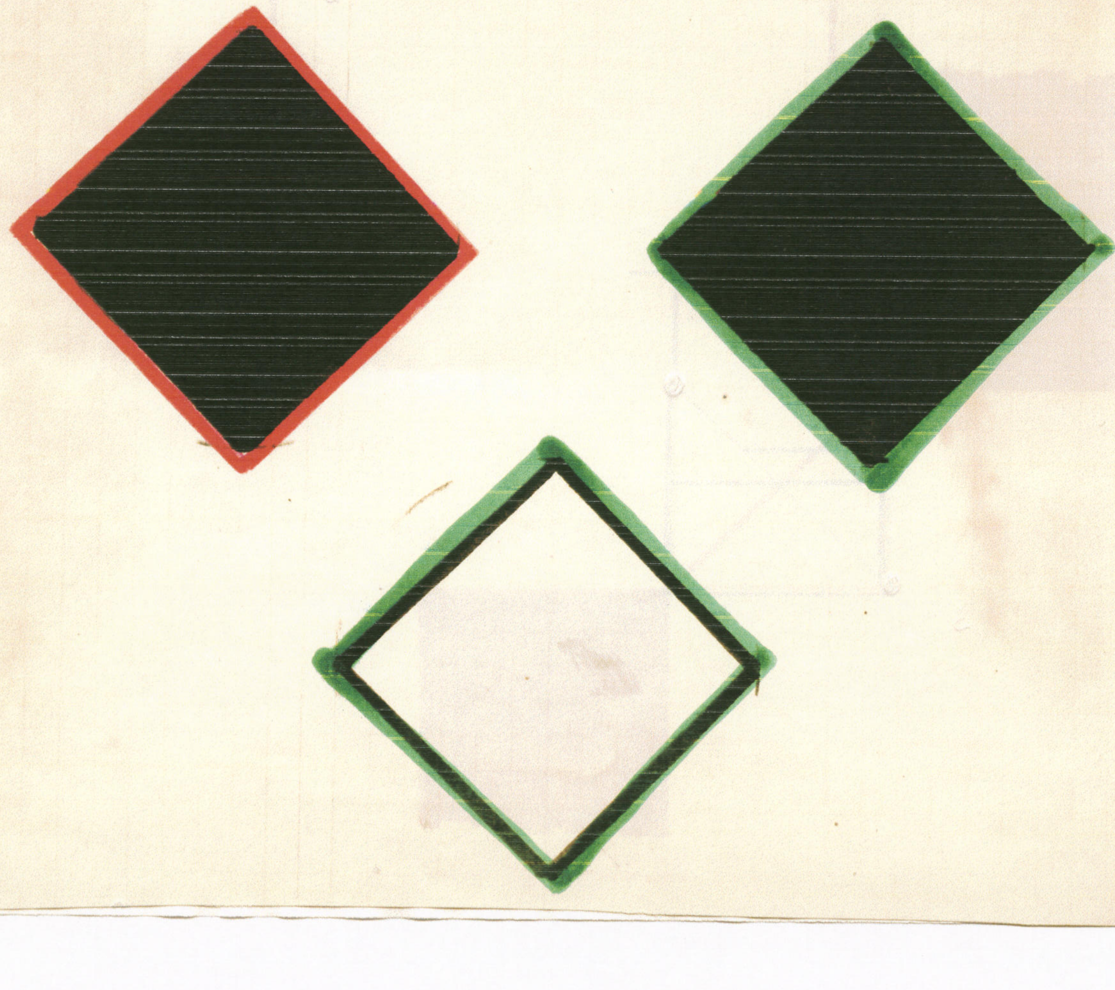
Espace métrique $\mathbb{R}^2, t$

avec $t((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$

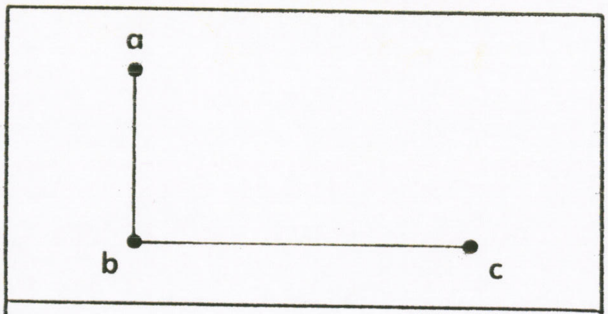
Taxidisque ouvert = Boule ouverte de $\mathbb{R}^2, t$

Taxidisque fermée = Boule fermée de $\mathbb{R}^2, t$

Taxicercle = Sphère de $\mathbb{R}^2, t$.



LE TAXIMETRIQUE STANDARD



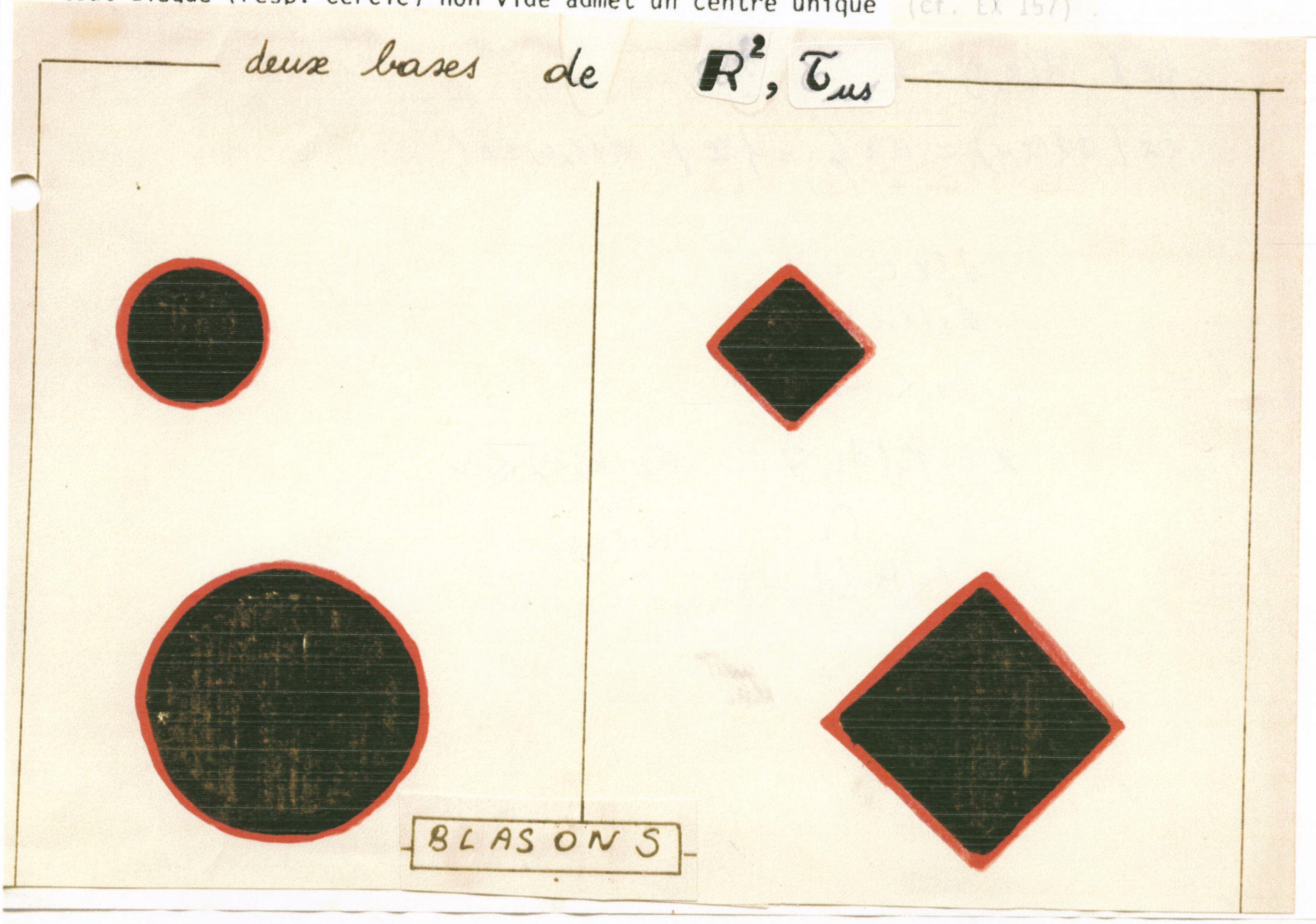
$t(a,b) = \mathbf{d}(a,c) + \mathbf{d}(c,b)$

$t : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} : ((x,y), (x',y')) \mapsto |x-x'| + |y-y'|$ est une distance sur $\mathbf{R}^2$

L'espace métrique défini ci-dessus est isomorphe au plan taximétrique.

L'orthogonalité des rues et des avenues en *Orthopolis*
est inessentielle pour la définition de la taxidistance.
Définir la taxidistance à *Scheefstad*,
ville dont les avenues constituent une direction du plan
et les rues une direction non nécessairement orthogonale à la première.

En métrique euclidienne comme en taximétrique orthogonale ou oblique :
tout disque (resp. cercle) non vide admet un centre unique (cf. EX 157)



Dans $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_t = \mathcal{T}_{us}}$$

Distance usuelle et Taxi-distance définissent la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$

Le plan euclidien et le plan taximétrique sont des espaces métriques *non* isomorphes, de *même* topologie.

La taxidistance est *subordonnée* à la distance euclidienne en ce sens qu'elle est définie par cette dernière et la donnée de deux directions orthogonales.

En le taxiplan Π,t :

Quels sont taxidisques ouverts, taxidisques fermés et taxicercles ?

Quelle est la taximédiatrice d'un couple de points distincts ?

Quelles sont les taxellipses, les taxhyperboles ?

Comment définir la taxidistance d'un point à une droite ?

Quelles sont les taxiparaboles ?

11 MEDIATRICE

En tout espace métrique

MEDIATRICE de la paire $\{a,b\}$ de points
= Ensemble des points équidistants de a et b

ELLIPSE — PARABOLE — HYPERBOLE

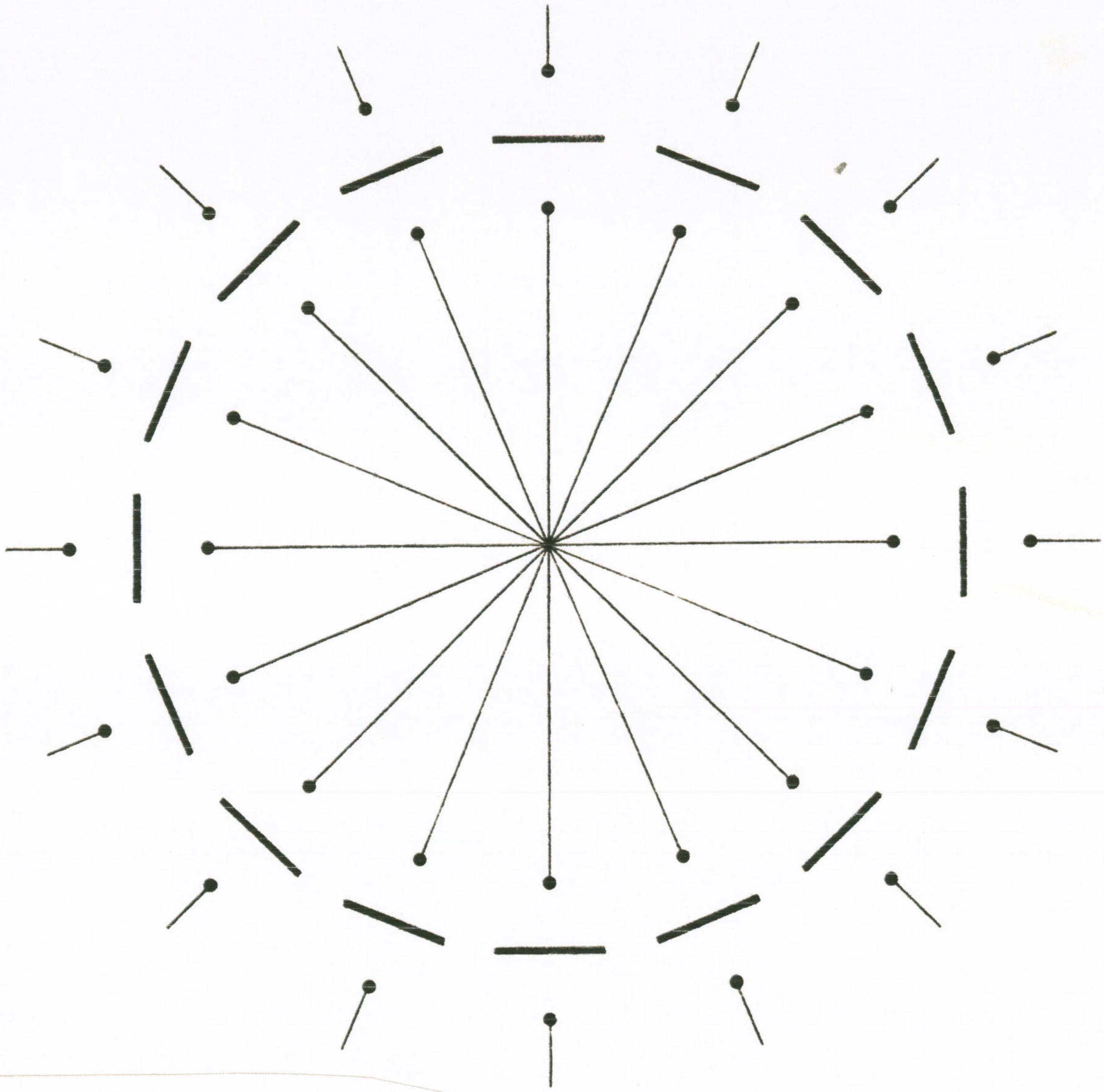
ELLIPSE de foyers a et b et de constante k
= Ensemble des points dont la somme des distances de a et de b vaut k

PARABOLE de foyer a et de Directrice D
= Ensemble des points dont la distance à a et à la droite D sont égales

HYPERBOLE de foyers a et b et de constante k
= Ensemble des points dont la valeur absolue de la différence des distances de a à b vaut k

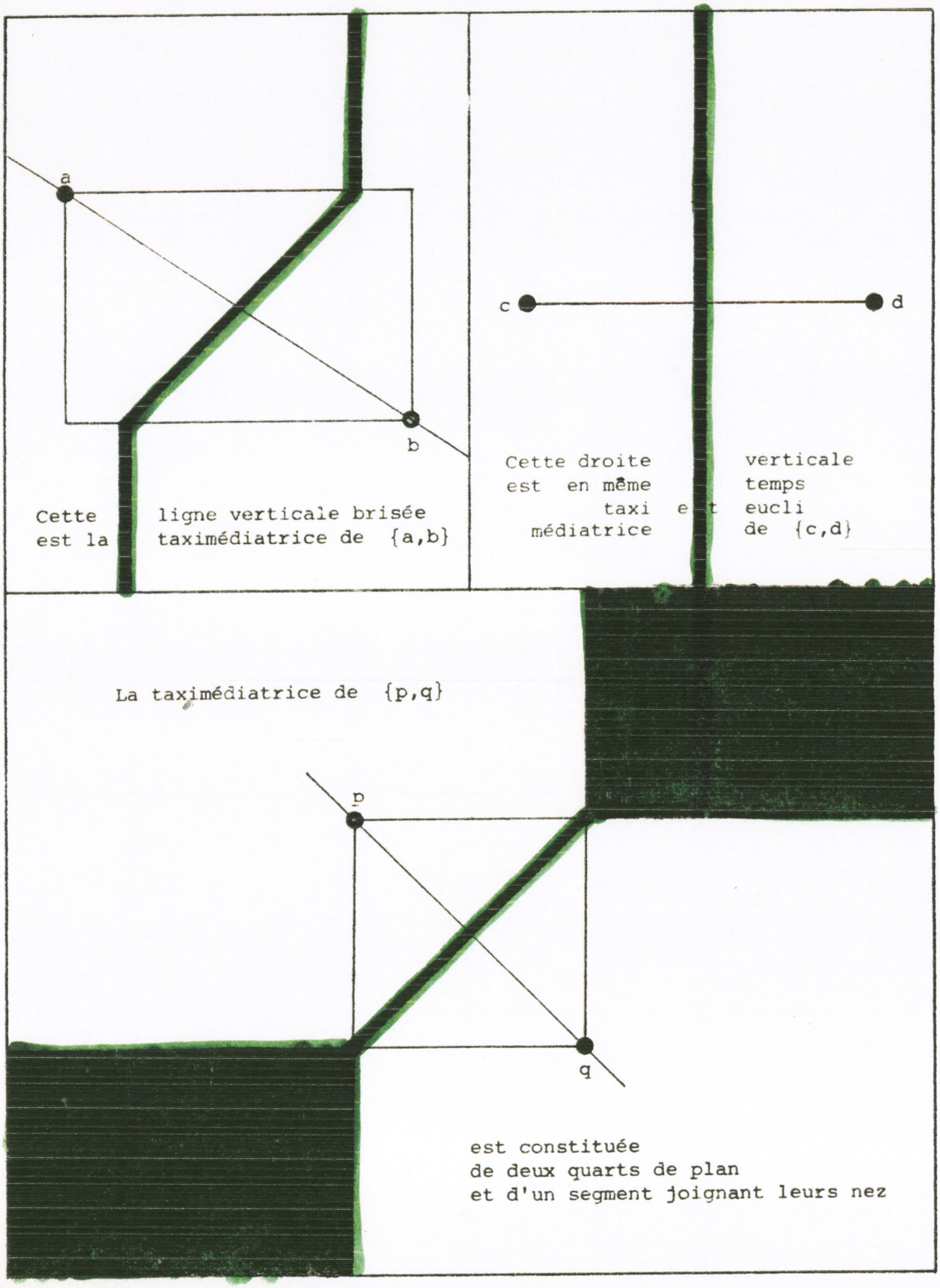
En tout espace métrique

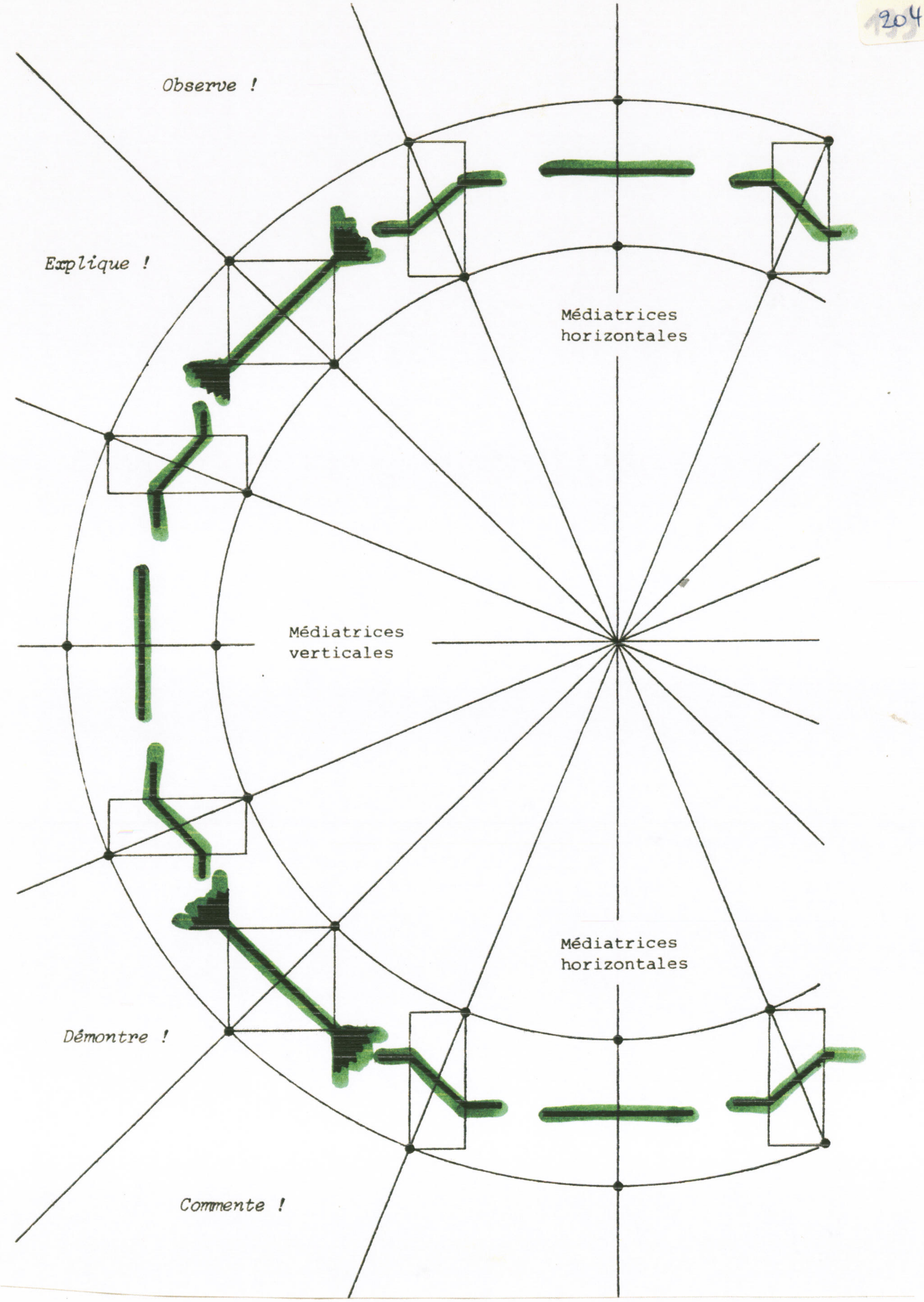
Pour le plan euclidien, le résultat est bien connu !



Essaye-toi au même jeu pour la taximédiatrice.

Voici quelques suggestions qui t'aideront sans doute.

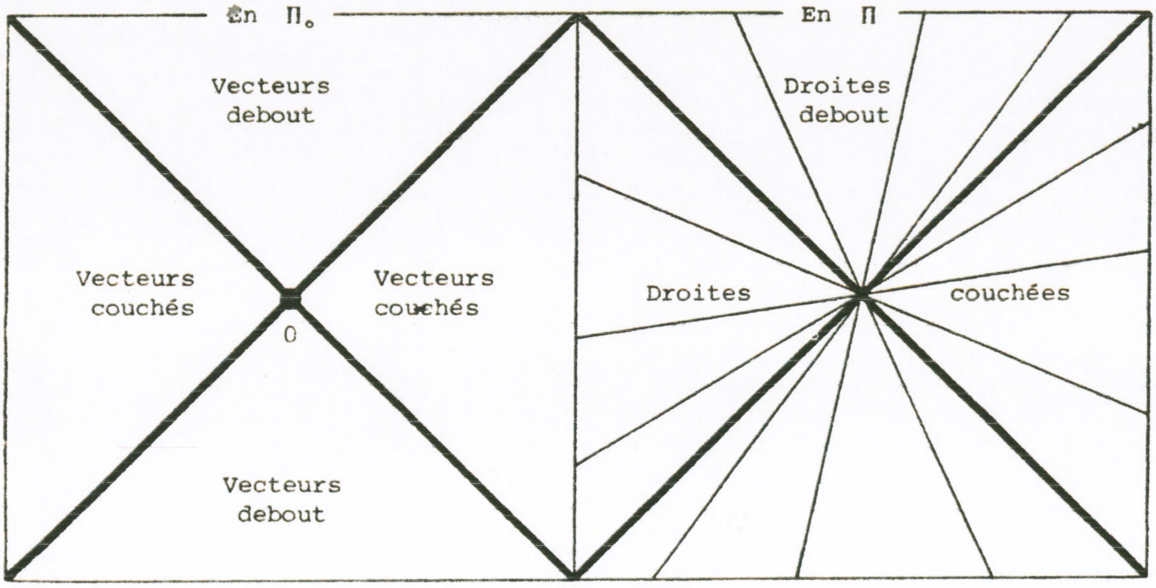



Observe !
Explique !
Médiatrices horizontales
Médiatrices verticales
Médiatrices horizontales
Démontre !
Commente !

13 DROITES ET VECTEURS DEBOUT ET COUCHES

La rose médiatrice des vents examinée en page 204 suggère de distinguer

droites et vecteurs *debout et couchés*



Le vecteur (x_0, x_1) est DEBOUT *ssi* $|x_0| \leqslant |x_1|$

Le vecteur (x_0, x_1) est COUCHE *ssi* $|x_1| \leqslant |x_0|$

Les vecteurs exceptionnels sont les vecteurs debout-couchés.

La droite "$a_0x_0 + a_1x_1 = a_2$" est DEBOUT
ssi la droite "$a_0x_0 + a_1x_1 = 0$" est debout

"$a_0x_0 + a_1x_1 = 0$" est une droite vectorielle et $(-a_1, a_0)$ l'un de ses vecteurs

La droite "$a_0x_0 + a_1x_1 = 0$" est DEBOUT
ssi le vecteur $(-a_1, a_0)$ est debout *ssi* $|a_1| \leqslant |a_0|$

Finalement :

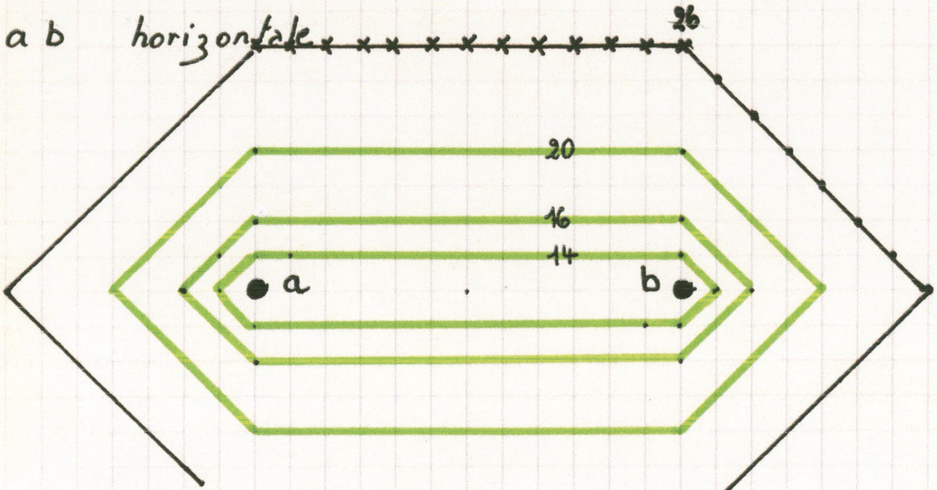
La droite "$a_0x_0 + a_1x_1 = a_2$" est DEBOUT *ssi* $|a_1| \leqslant |a_0|$
La droite "$a_0x_0 + a_1x_1 = a_2$" est COUCHEE *ssi* $|a_0| \leqslant |a_1|$

Une base orthonormée (u_0, u_1) étant fixée,
la symétrie d'axe debout-couché "$x_0 = x_1$" échange les vecteurs (y_0, y_1) et (y_1, y_0) ainsi que les droites "$a_0x_0 + a_1x_1 = a_2$" et "$a_1x_0 + a_0x_1 = a_2$"
Cet auto du taxivectoriel plan bijecte l'ensemble des droites debout sur l'ensemble des droites couchées et vice versa.

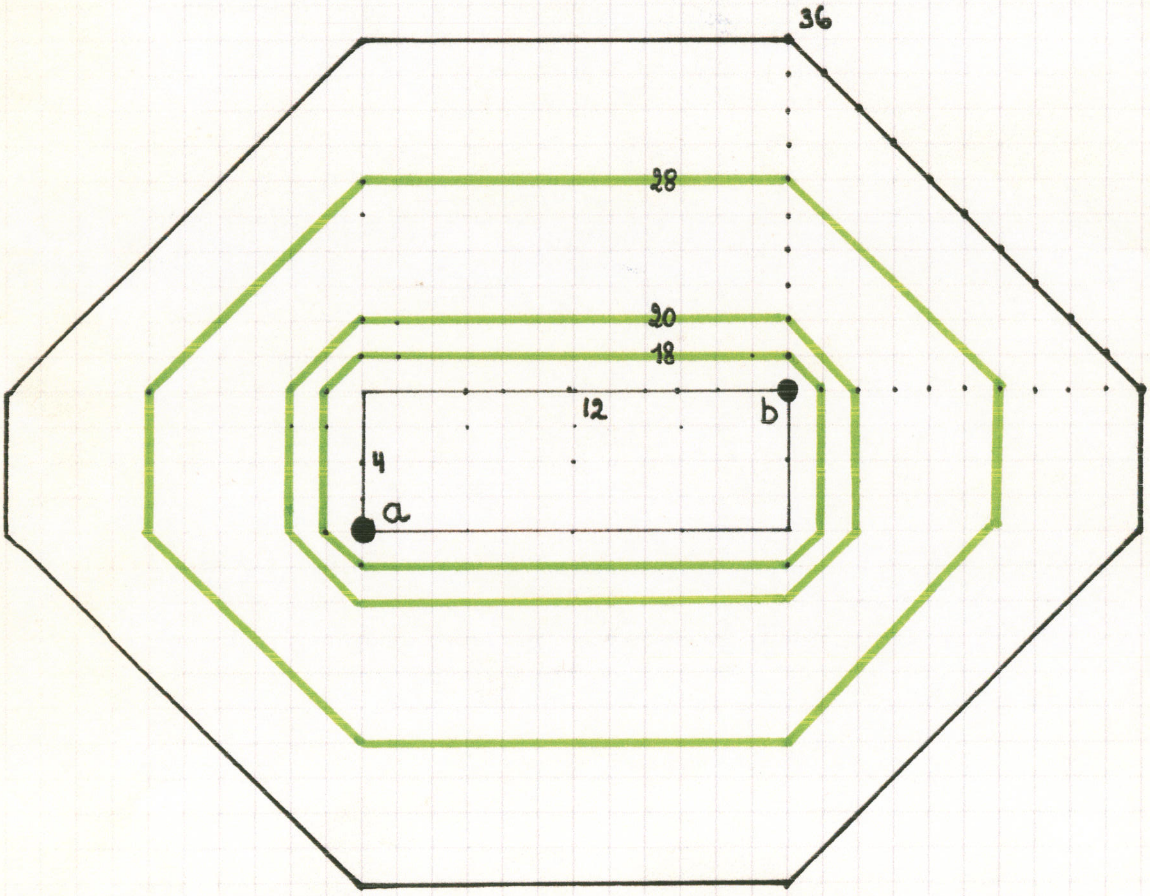
Grâce à l'automorphisme indiqué ci-dessus, chaque fois que nous obtiendrons un résultat relatif aux droites debout, nous pourrons l'appliquer également aux droites couchées et réciproquement.

Taxellipses

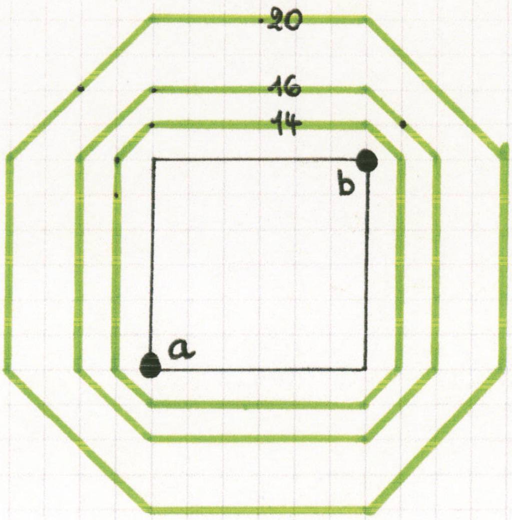
I. a b horizontale



II ab couchée ________ $t(a,b) = 16$



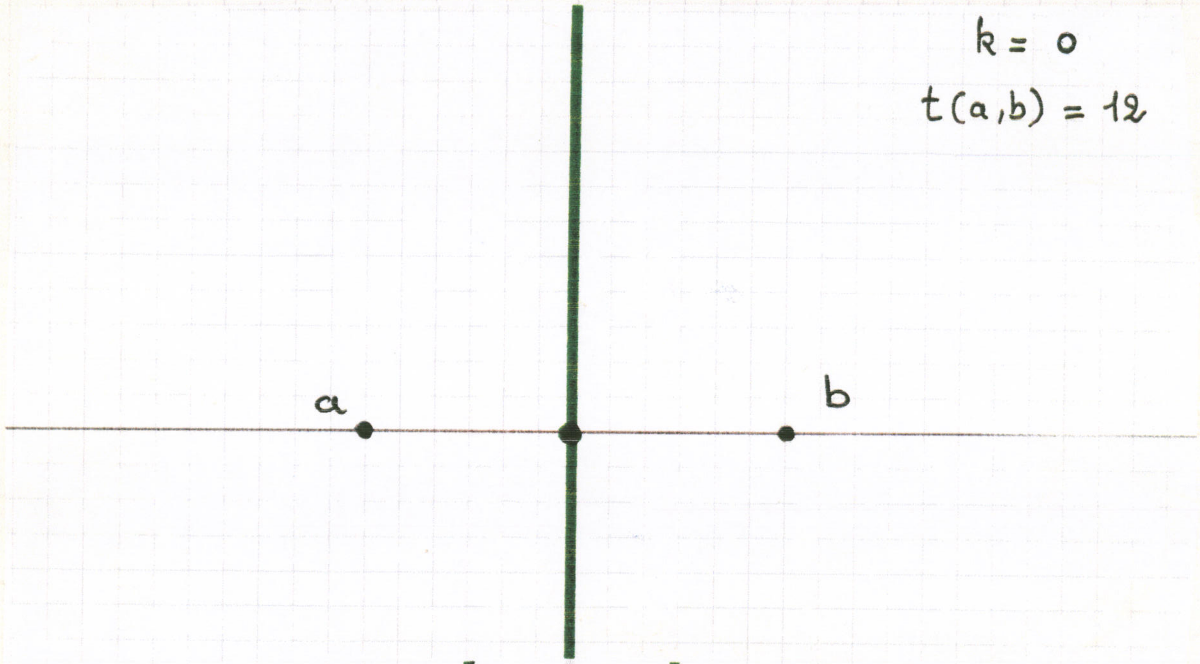
$t(a,b) = 12$

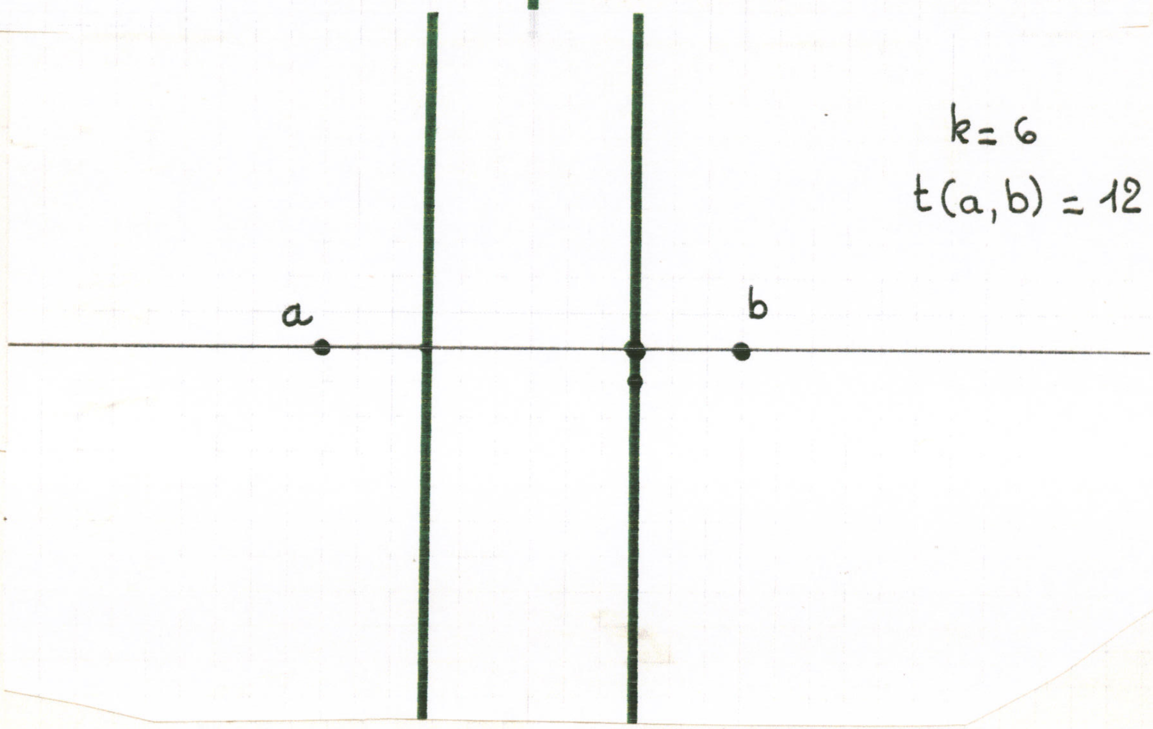


Tax hyperboles

$t(a,b) = 12$

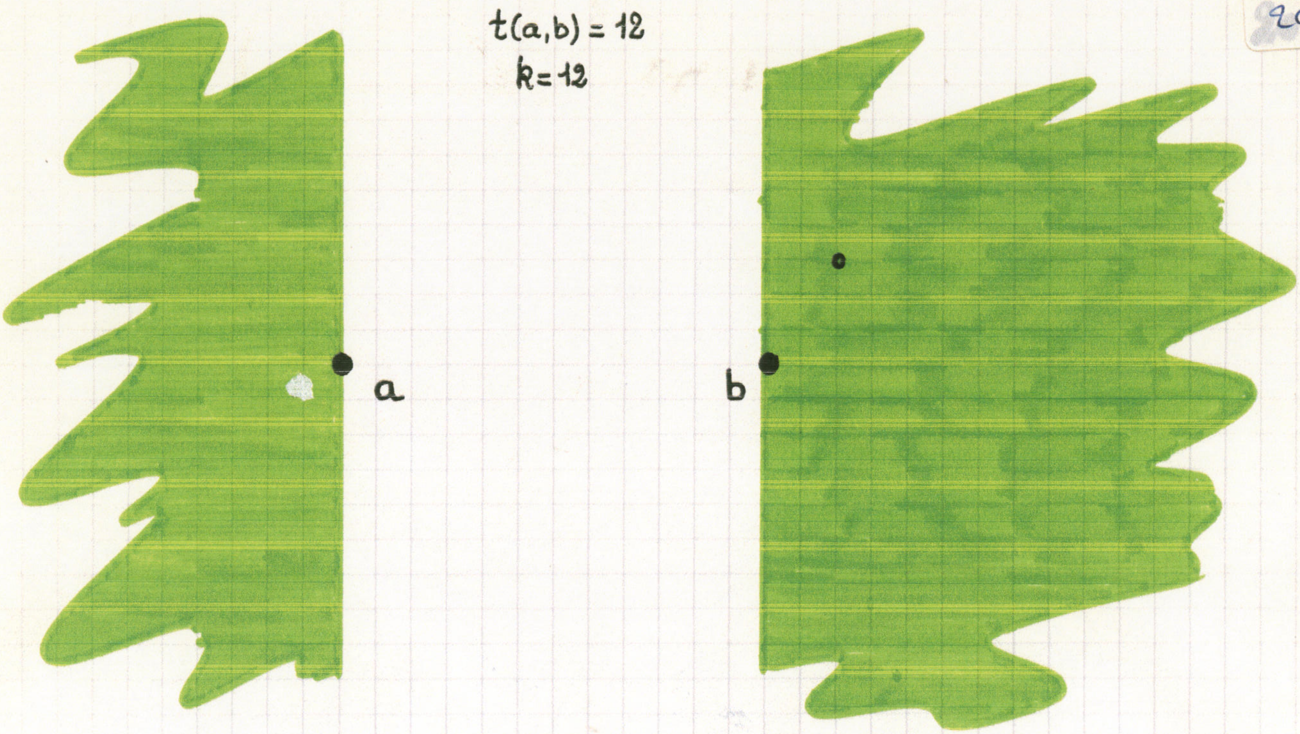
ab horizontale





$t(a,b) = 12$

$k = 12$

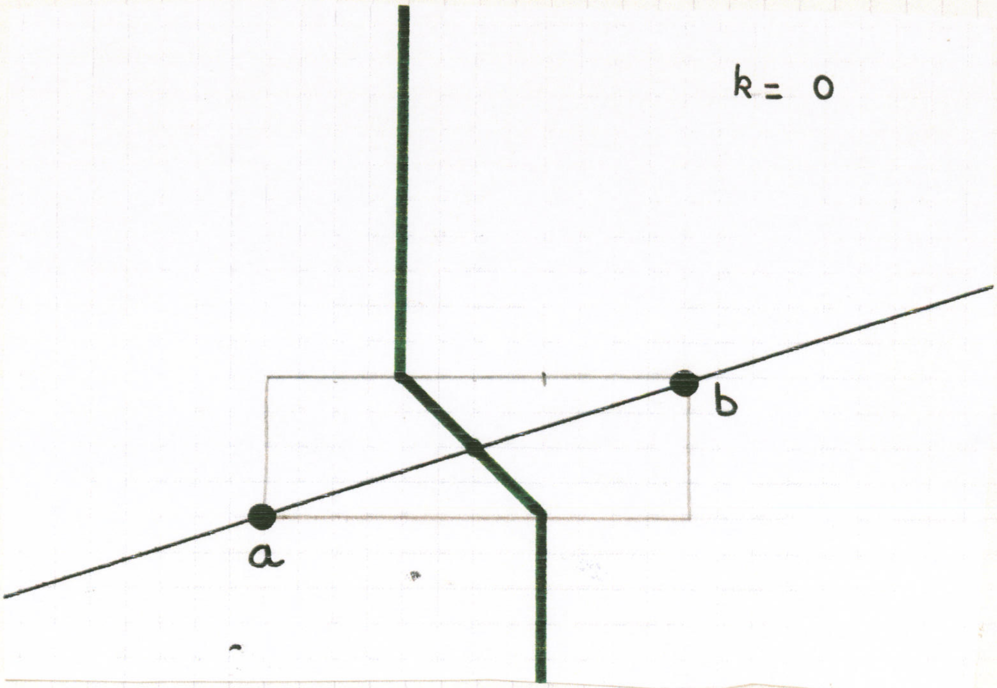


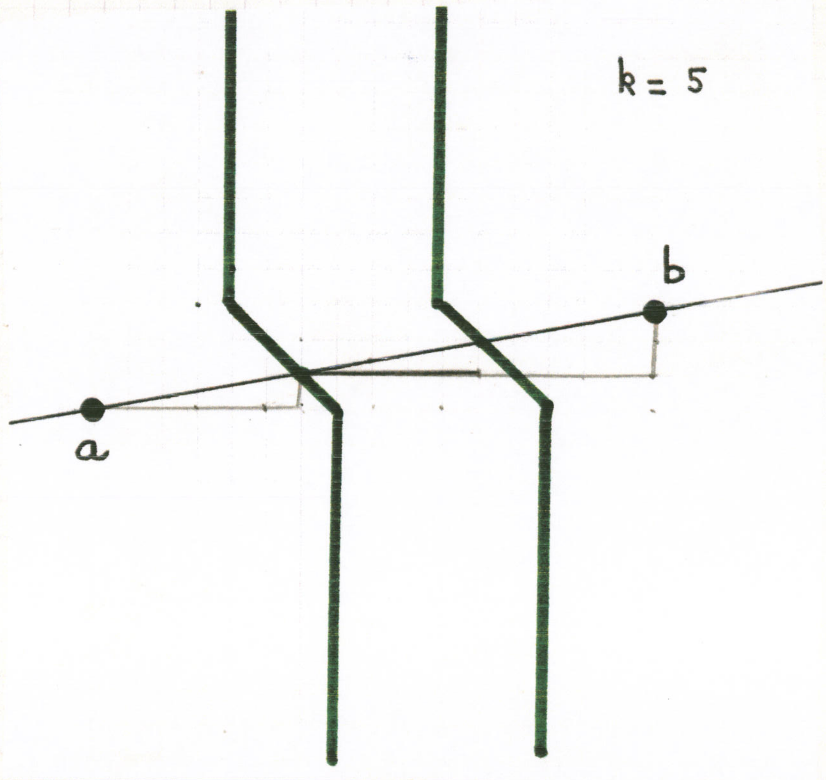
Si $k > 12 = t(a,b)$

Alors $\text{taxhyp}(a,b\,;12) = \emptyset$

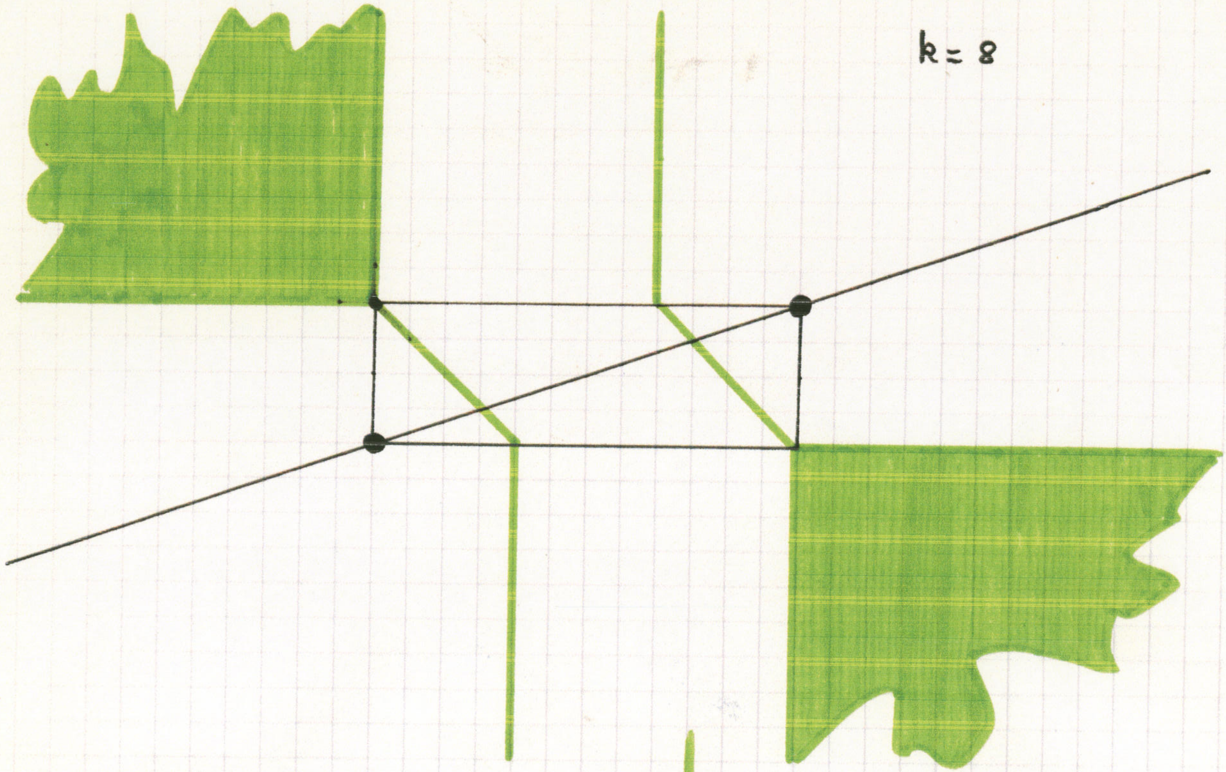
$t_{(a,b)} = 16$

ab couchée

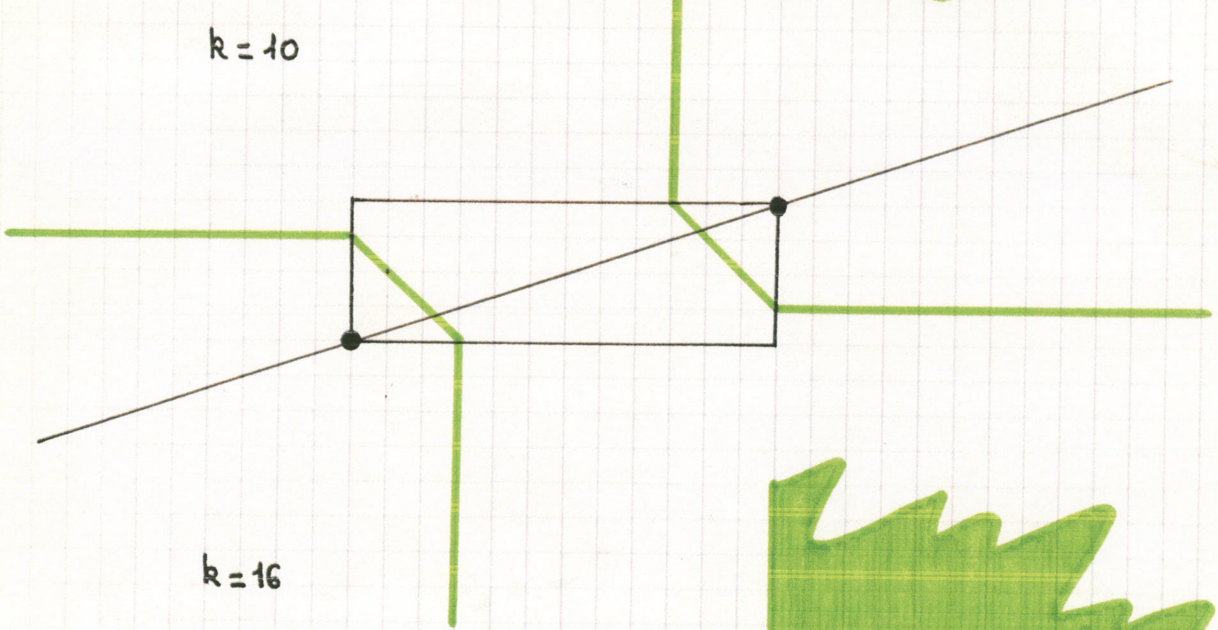




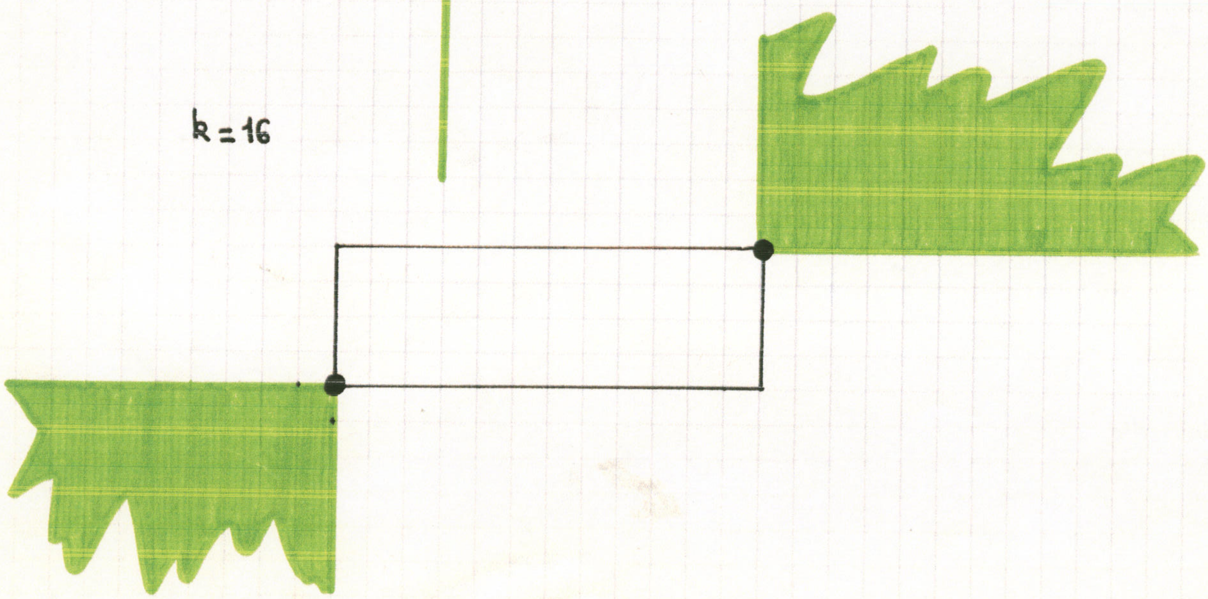
k = 8



k = 10

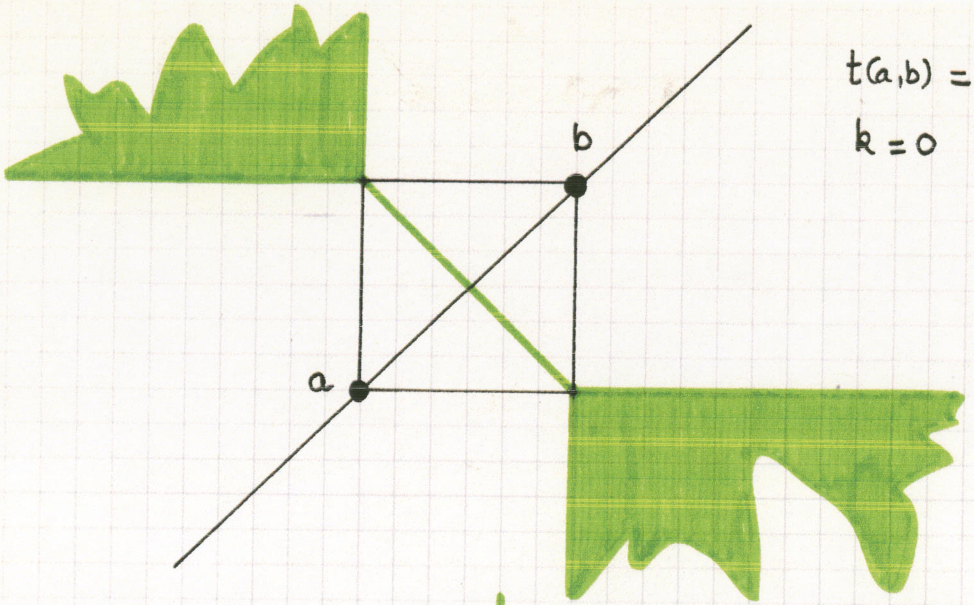


k = 16

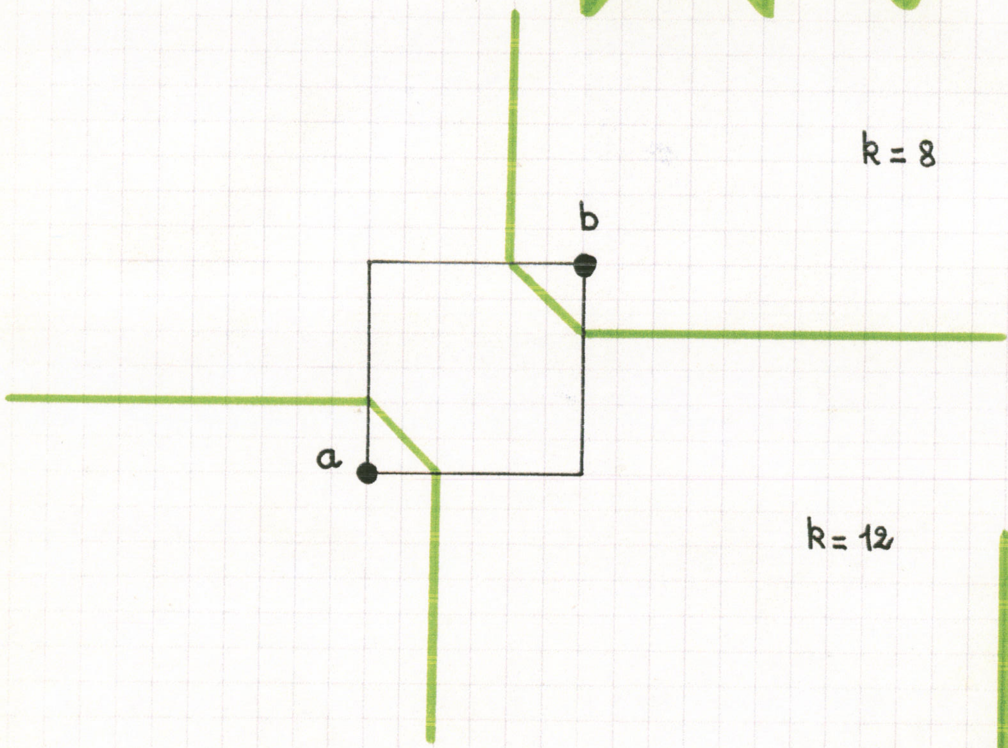


$t(a,b) = 12$

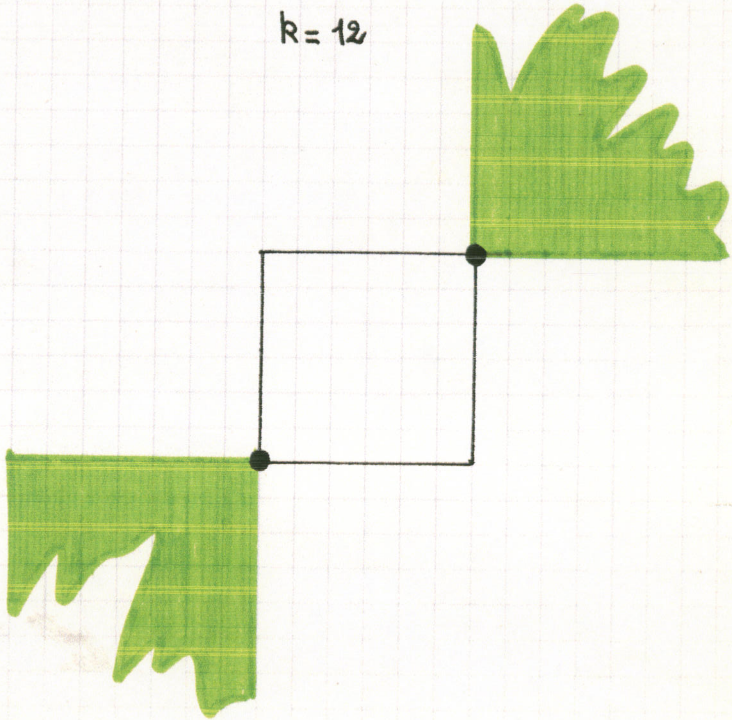
$k = 0$



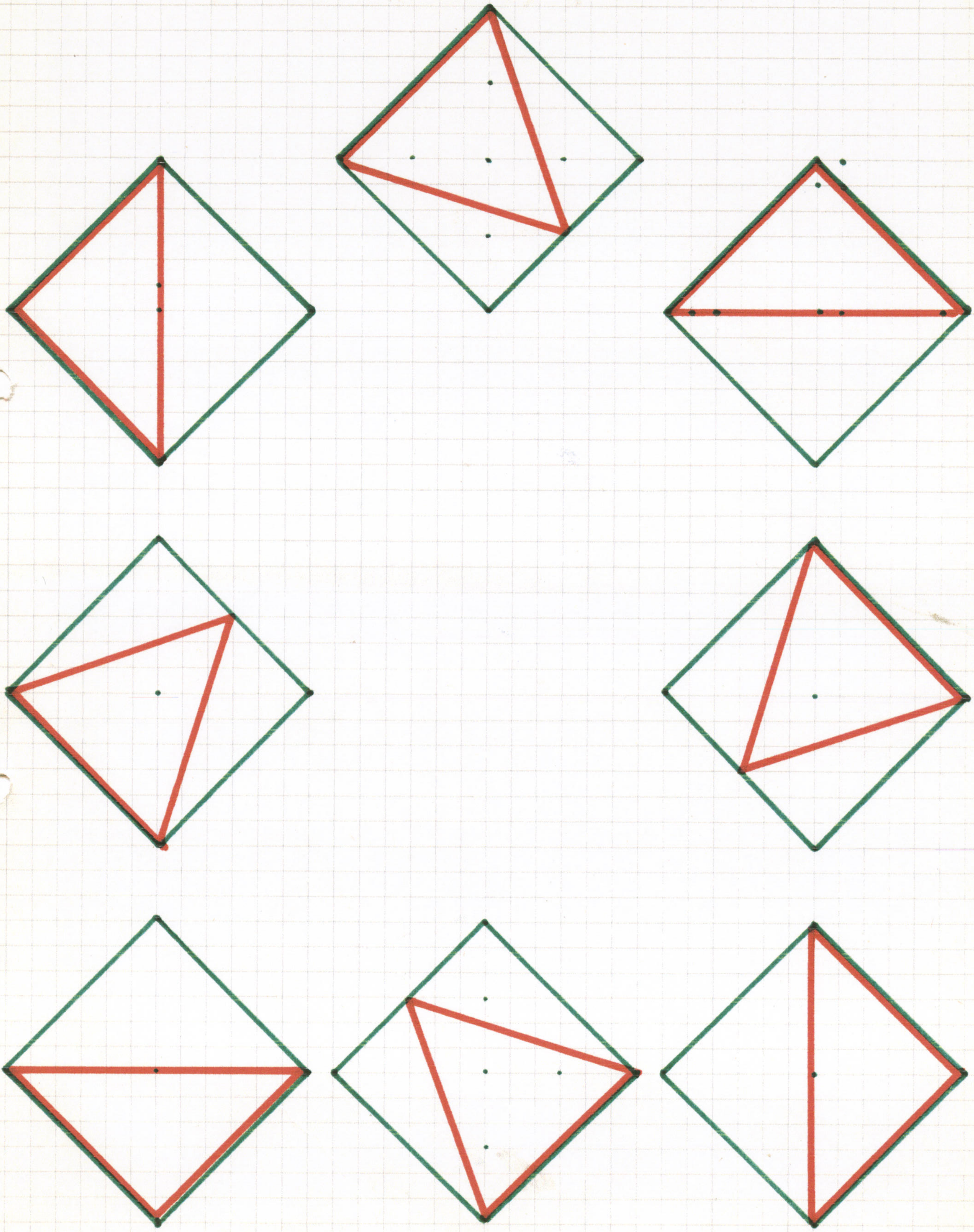
$k = 8$



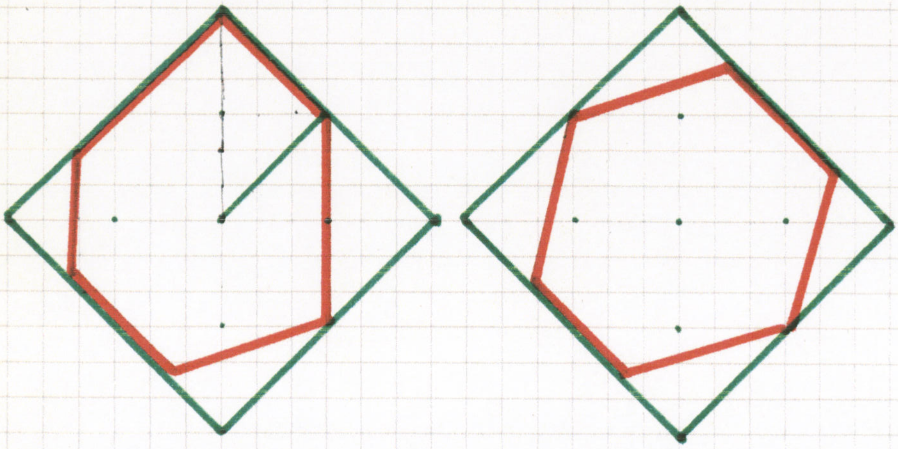
$k = 12$



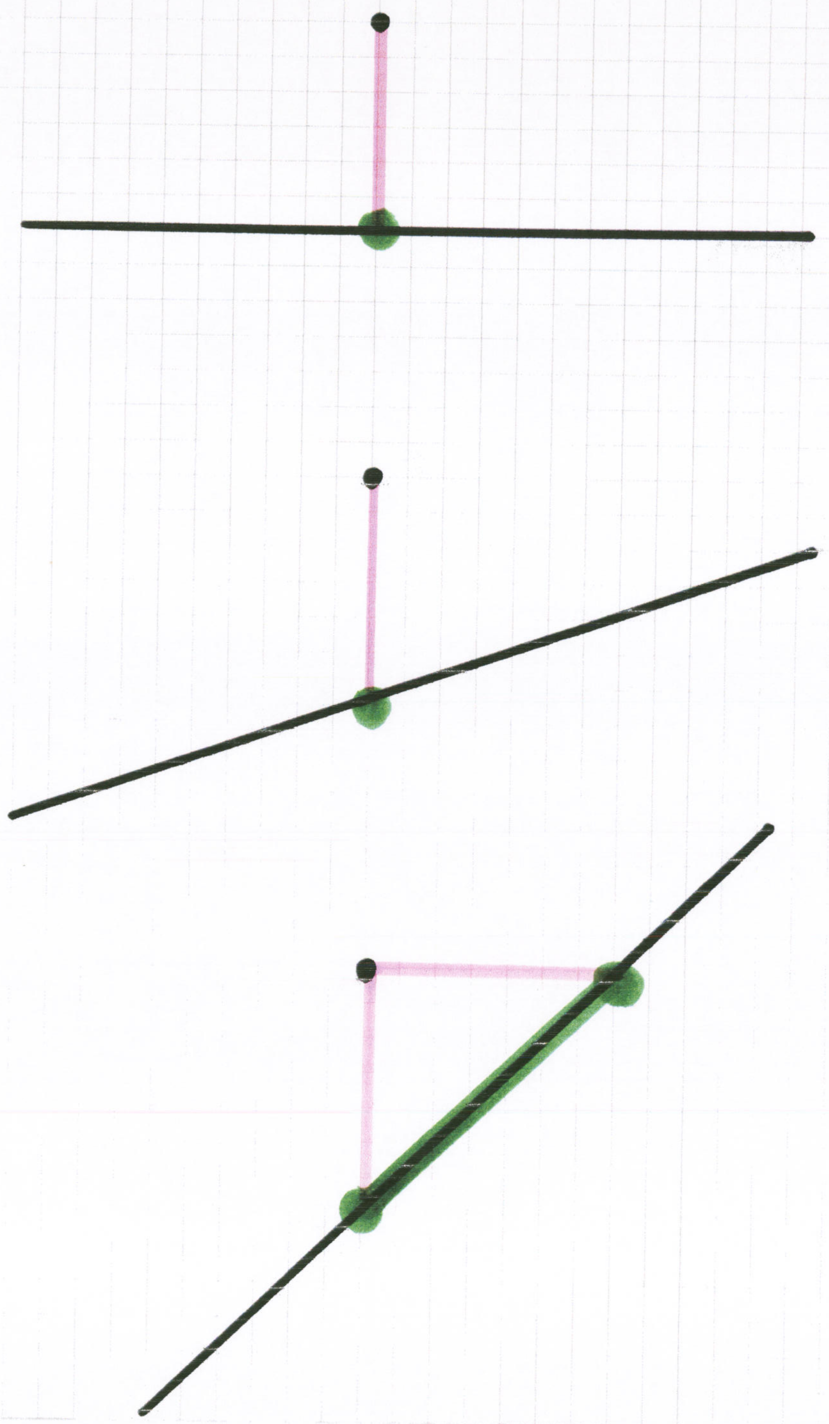
Triangles Taxèquilatéraux



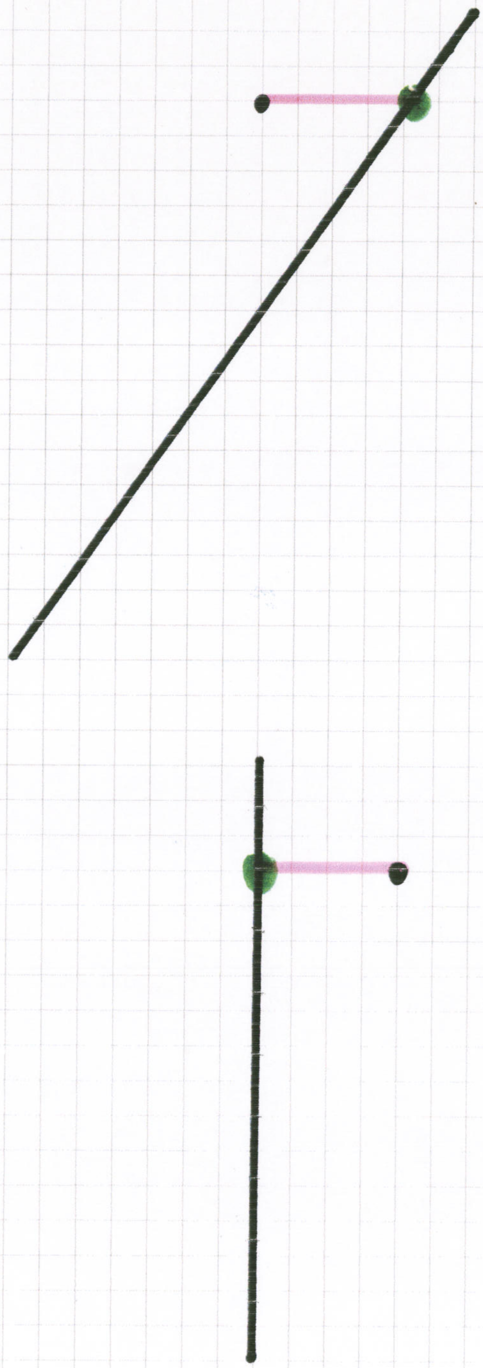
Taxhéxagones convexes



Sur une droite
le(s) point(s) le(s) plus proche(s) d'un point

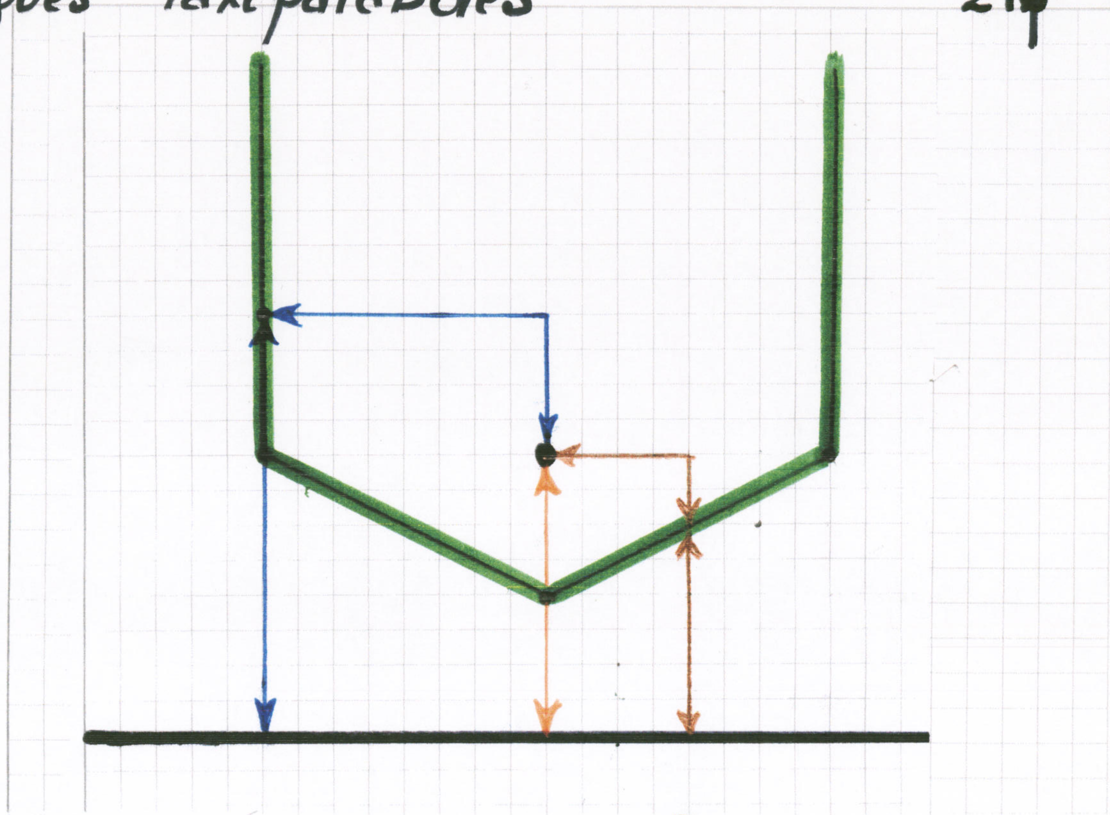


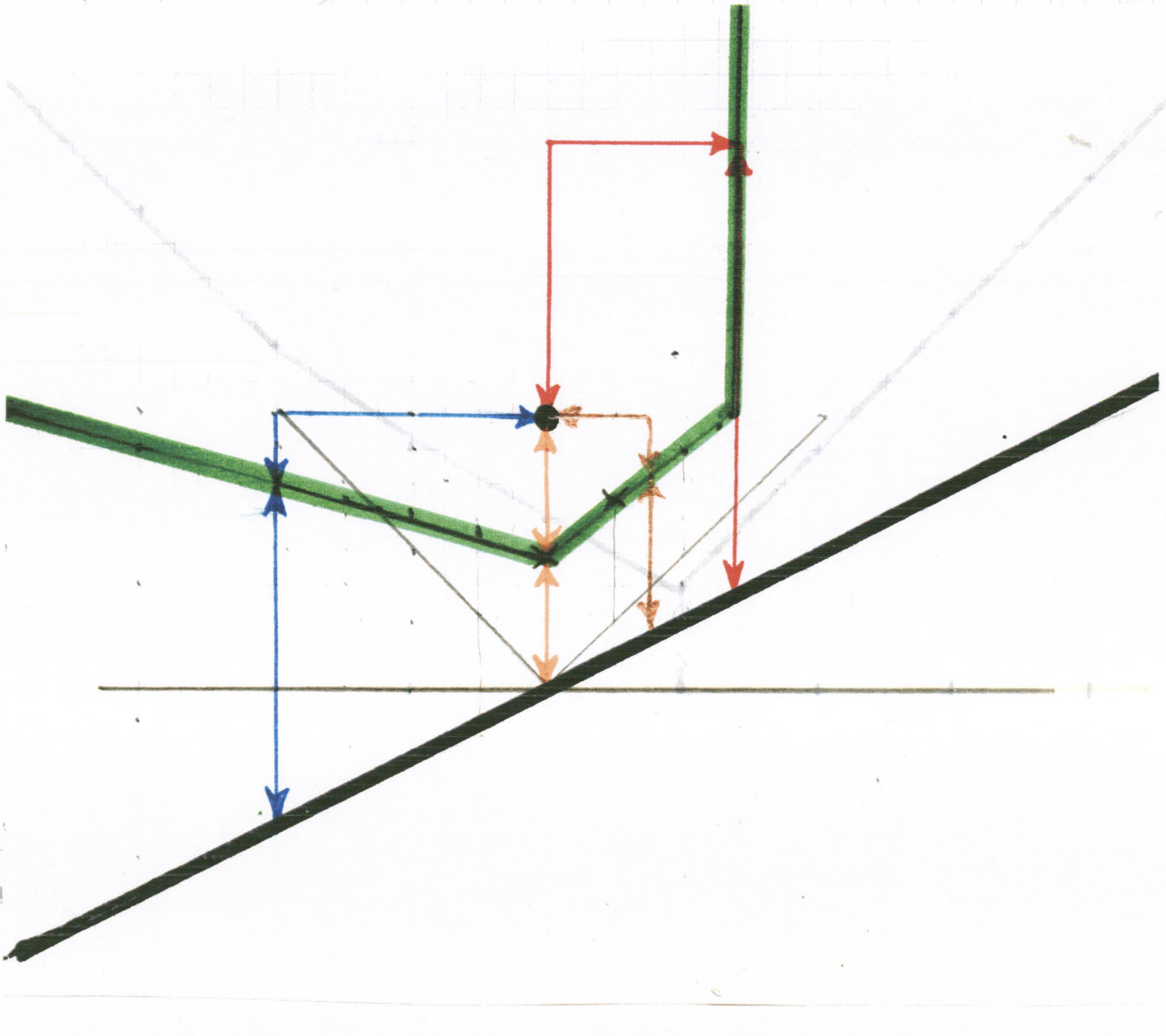
Remarques éventuelles:



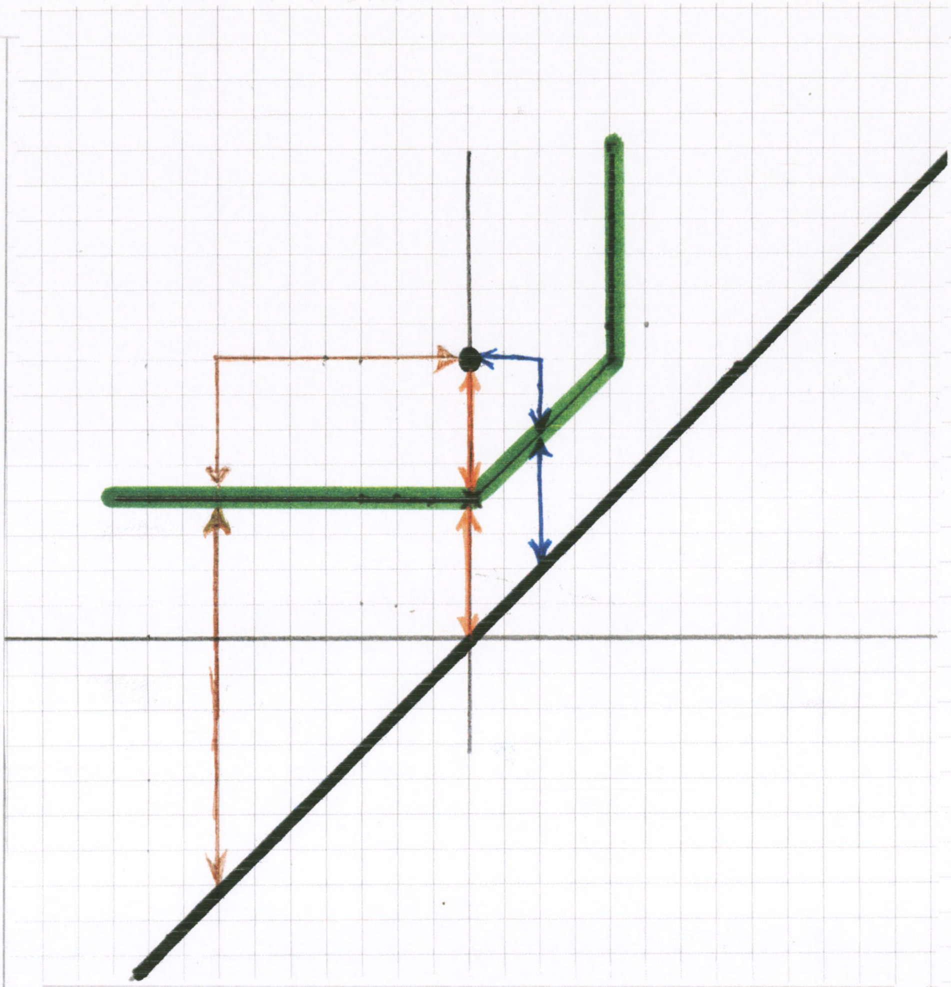
Remarques éventuelles:

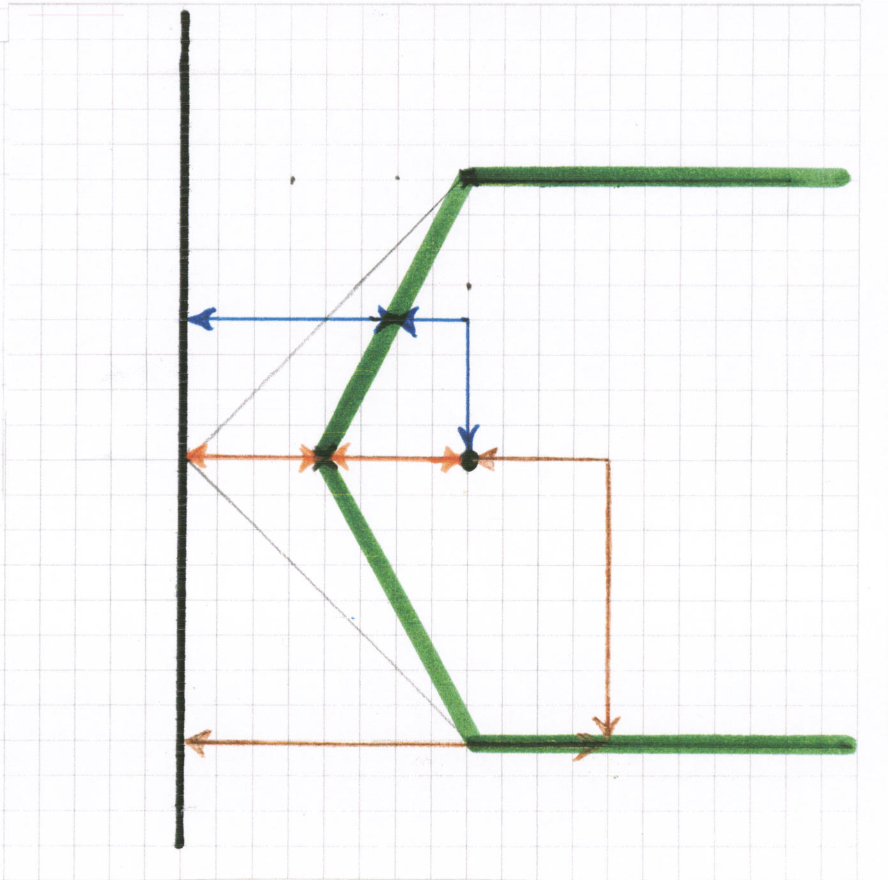
quelques taxiparaboles





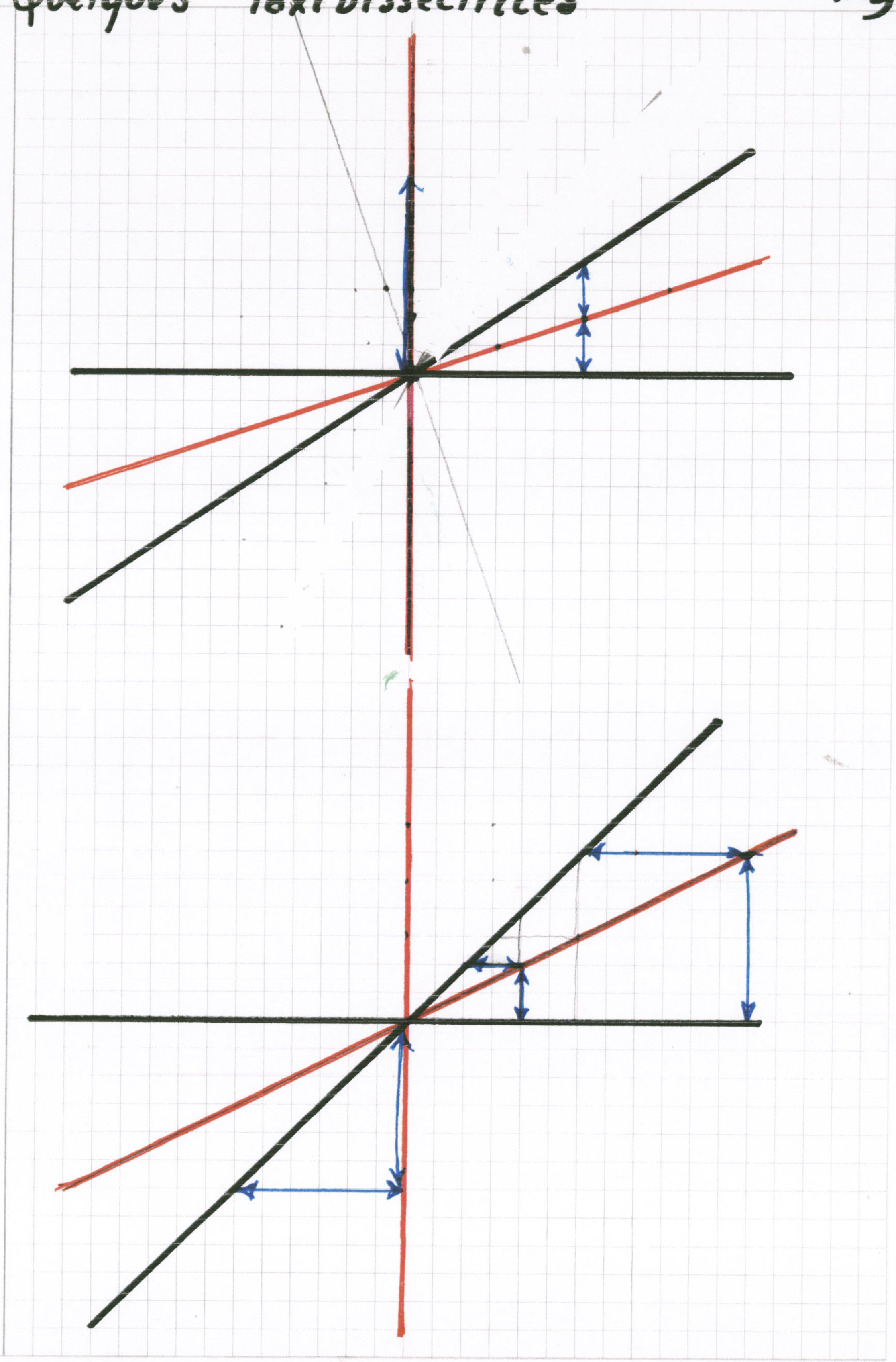
Remarques éventu



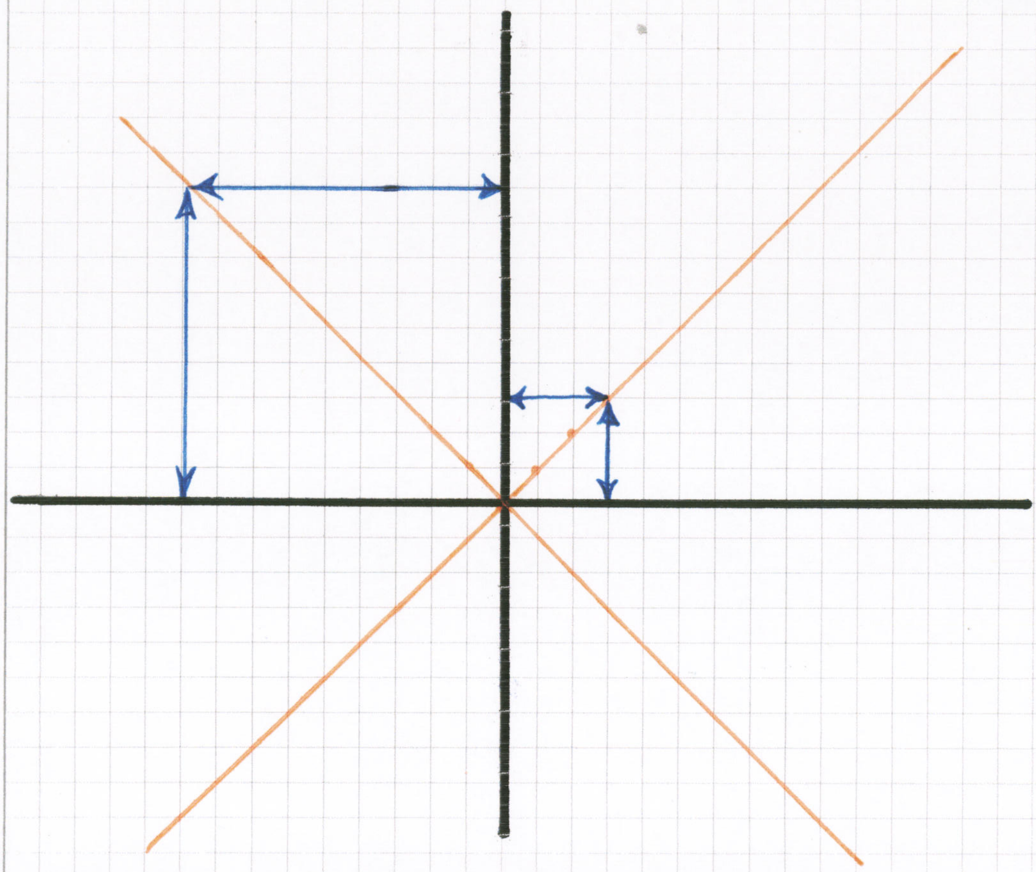


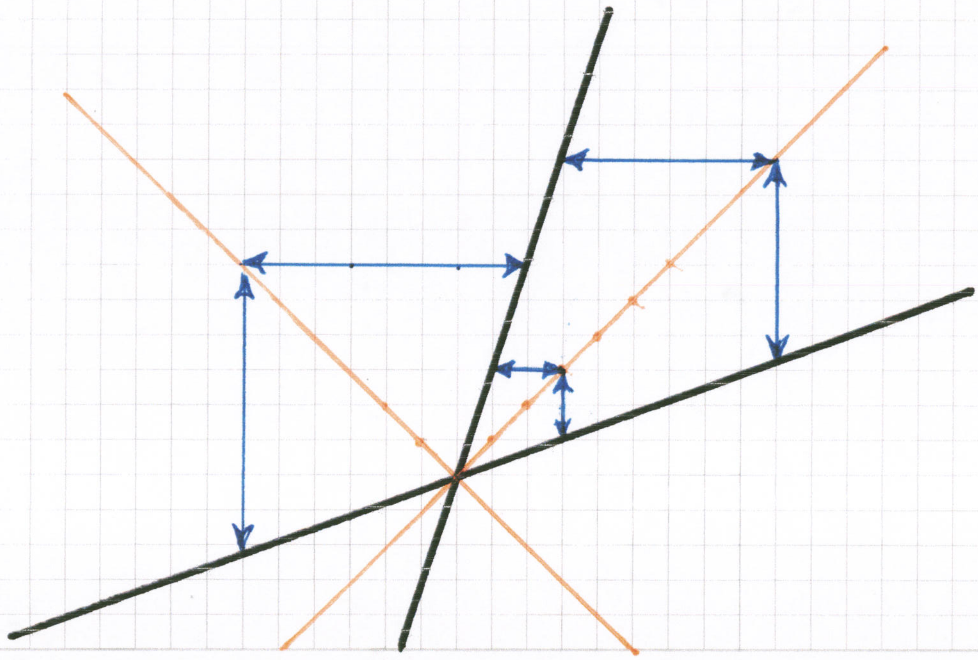
Remarques éventuelles:

Quelques Taxi bissectrices

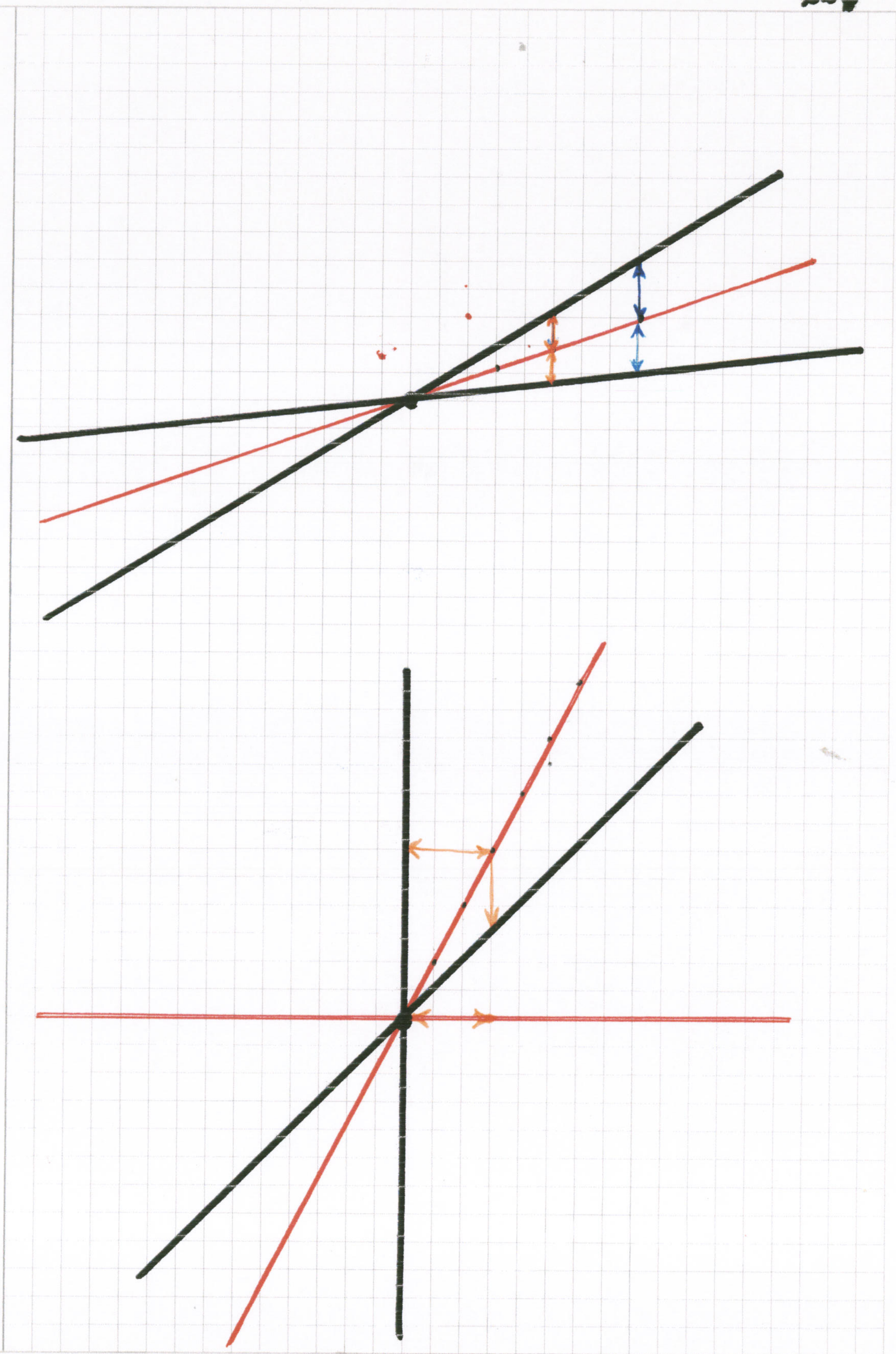


Remarques éventuelles:





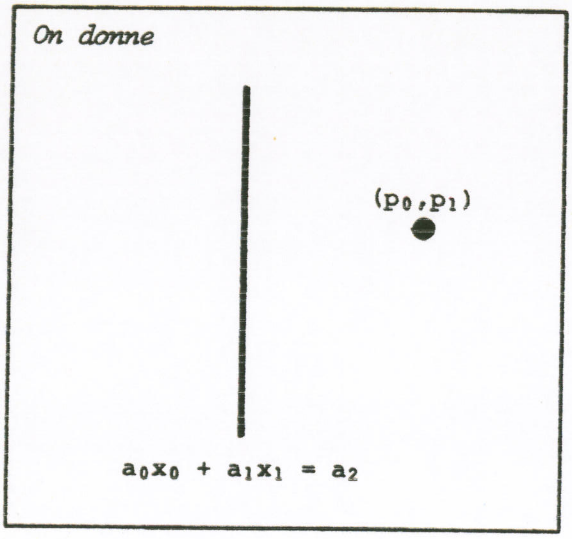
Remarques éventuelles:

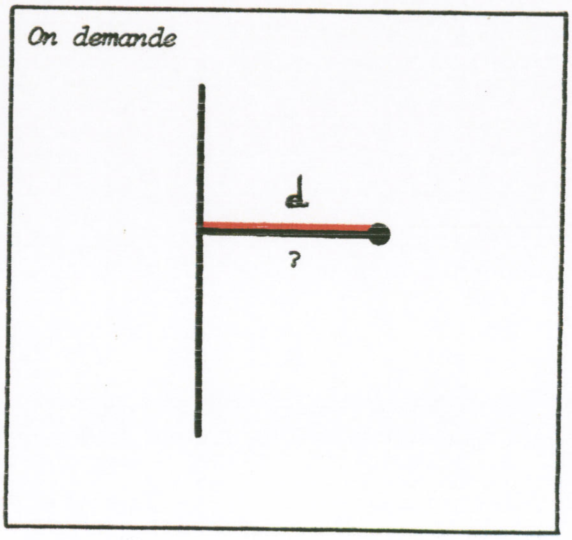


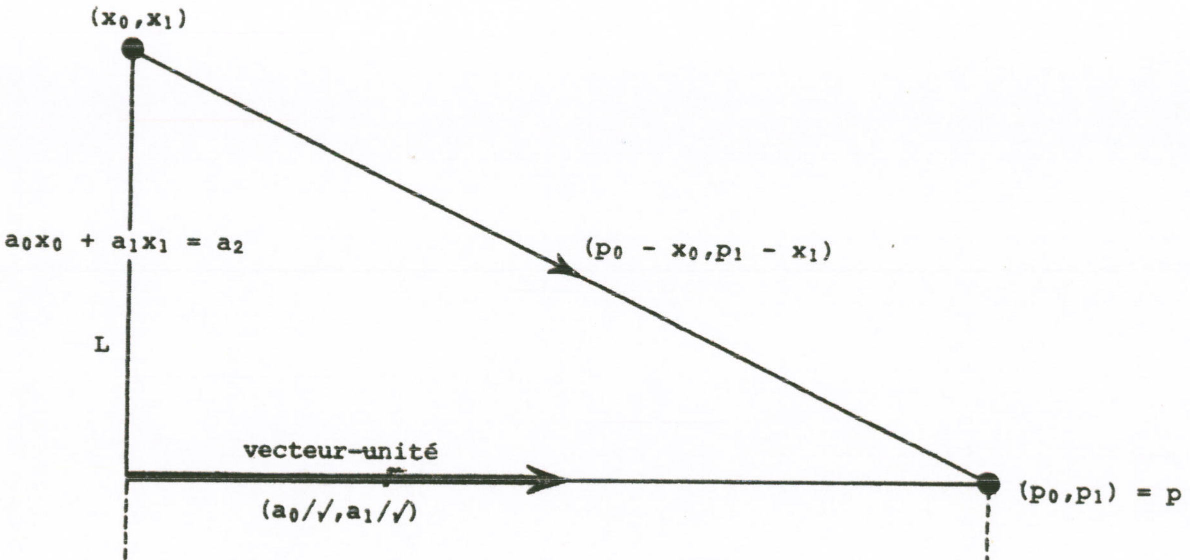
Remarques éventuelles:

DISTANCE EUCLIDIENNE POINT-DROITE EN COORDONNEES ORTHONORMEES

La distance euclidienne du point $p = (p_0, p_1)$ à la droite $L = \{(x_0, x_1) \mid a_0x_0 + a_1x_1 = a_2\}$ sera noté : $d(p,L)$







$$d(p,L) = (a_0/\surd, a_1/\surd) \cdot (p_0 - x_0, p_1 - x_1)$$
$$= (a_0(p_0 - x_0) + a_1(p_1 - x_1)) / \surd$$
$$= ((a_0p_0 + a_1p_1) - (a_0x_0 + a_1x_1)) / \surd$$

mais $a_0x_0 + a_1x_1 = a_2$

$$= \frac{a_0p_0 + a_1p_1 - a_2}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}}$$

FORMULE DE LA TAXIDISTANCE POINT-DROITE (en coordonnées orthonormées)

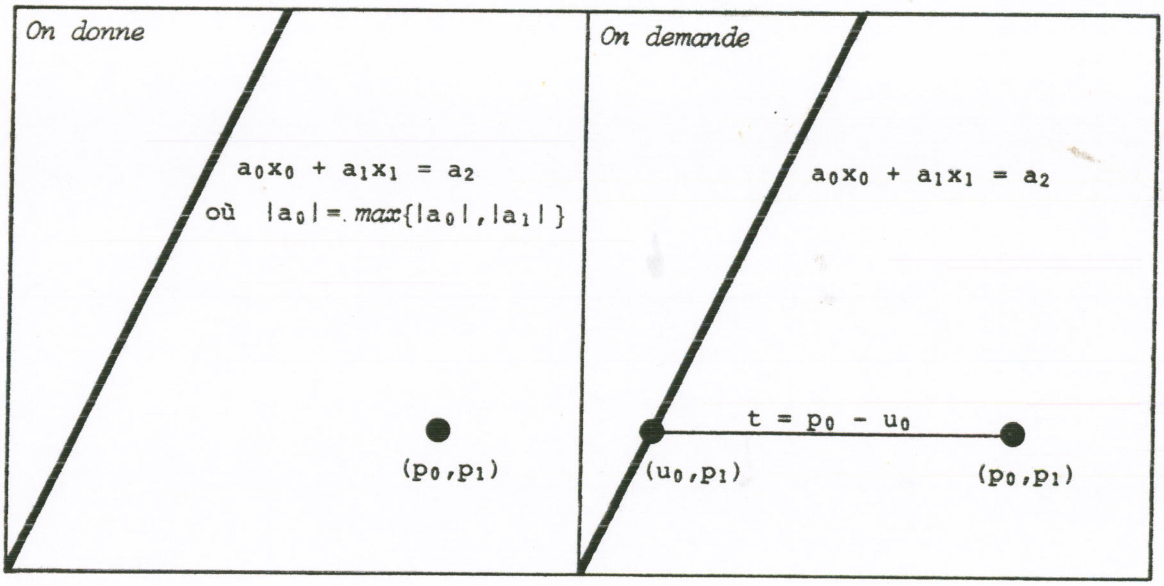
La taxidistance du point (p_0,p_1) à la droite "$a_0x_0 + a_1x_1 = a_2$"
sera notée $t(p_0,p_1;a_0x_0 + a_1x_1 = a_2)$

Avant de nous lancer dans le calcul, rhabillons la formule de l'euclidistance point-droite d'un uniforme complètement euclidien :

$$\boxed{(p_0,p_1;a_0x_0 + a_1x_1 = a_2) \;=\; \frac{a_0p_0 + a_1p_1 - a_2}{d(0,0;a_0,a_1)}}$$

Quelle est maintenant une conjecture naturelle pour la taxisituation ?

Sans nuire à la généralité , nous supposerons que la droite donnée $a_0x_0 + a_1x_1 = a_2$ est debout, ce qui signifie que $|a_0| = max\{|a_0|,|a_1|\}$



Reste à calculer u_0 : $a_0u_0 + a_1p_1 = a_2$

$$u_0 = \frac{a_2 - a_1p_1}{a_0}$$

On obtient : $t = p_0 - u_0 = p_0 - \dfrac{a_2 - a_1p_1}{a_0} = \dfrac{a_0p_0 + a_1p_1 - a_2}{max\{|a_0|,|a_1|\}}$

Par automorphisme échangeant "x_0" et "x_1" , cette très jolie formule s'applique aux droites couchées, lorsque $max\{|a_0|,|a_1|\} = |a_1|$

$$\boxed{t(p_0,p_1;a_0x_0 + a_1x_1 = a_2) \;=\; \frac{a_0p_0 + a_1p_1 - a_2}{max\{|a_0|,|a_1|\}}}$$

224

FAUT PAS ETRE TRISTE !

Tu avais probablement conjecturé que le dénominateur serait $t(0,0;a_0,a_1)$. C'est sans espoir, mais ce n'est pas une raison pour *devenir* mélancolique ! Essayons de sauver ce qui peut l'être !

Le dénominateur dans la formule de la taxidistance point-droite n'est pas la taxidistance de $(0,0)$ à (a_0,a_1) . Ce dénominateur pourrait-il être la distance de $(0,0)$ à (a_0,a_1) pour une autre distance $m : \Pi \times \Pi \to \mathbf{R}^+$? Quelle fonction $\Pi \times \Pi \to \mathbf{R}^+$ se présente comme candidate-distance ?

LA CANDIDATE EST AGREEE

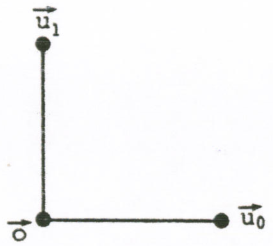
Pour tous $x_0,x_1,y_0,y_1, \ldots$ écrivons $x = (x_0,x_1)$, $y = (y_0,y_1)$, ...

La fonction $m : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+$ *définie par :*

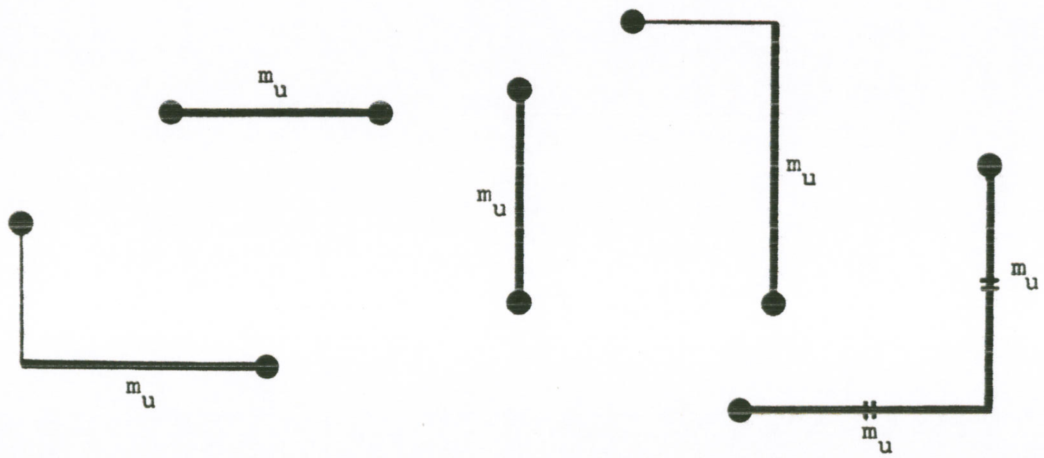
$$m(x;y) = m((x_0,x_1);(y_0,y_1)) \triangleq \max\{|x_0 - y_0|,|x_1 - y_1|\}$$

est une distance sur $\mathbf{R}^2$

Cette base orthonormée identifie $\mathbf{R}^2$, Π_o et Π



et permet une représentation géométrique de la fonction m

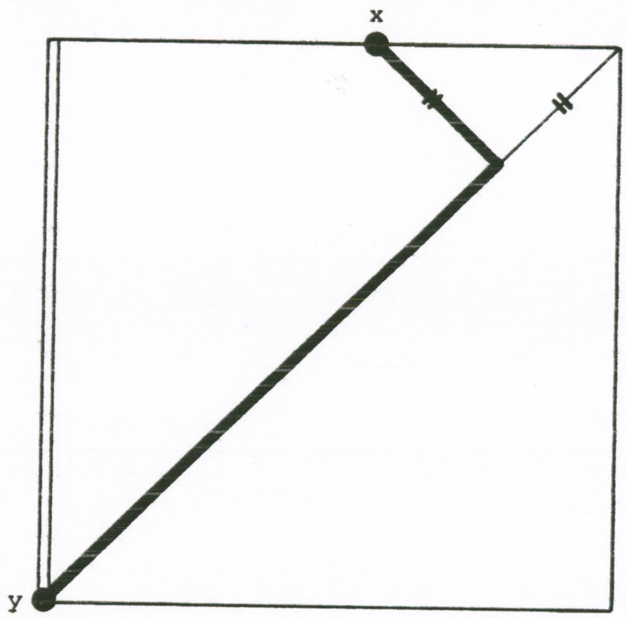


225

La fonction $\Pi\times\Pi \to \mathbf{R}^+$ est notée "m_u" (et souvent m par abréviation).

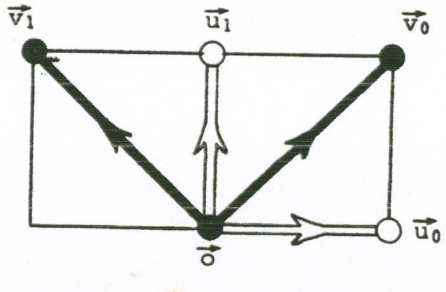
Voici, graphiquement formulées, les définitions parallèles de t_u et u

Ce dessin très simple



montre que la taxidistance, pour des axes tournés d'un quart de tour et sans changement d'unité de longueur, égale $\sqrt{2}.m_u$

Observons la base $\vec{v_0} = \vec{u_0} + \vec{u_1}$, $\vec{v_1} = \vec{u_1} - \vec{u_0}$



$\vec{v_0} \perp \vec{v_1}$ puisque $\vec{v_0}.\vec{v_1} = (\vec{u_0} + \vec{u_1}).(\vec{u_1} - \vec{u_0}) = 0$

Longueur de $\vec{v_0}$ = Longueur de $\vec{v_1}$ = $\sqrt{2}$.Longueur de $\vec{u_0}$ = $\sqrt{2}$.Longueur de $\vec{u_1}$

En d'autres termes, le passage de la base $(\vec{u_0},\vec{u_1})$ à la base $(\vec{v_0},\vec{v_1})$ multipli par $\sqrt{2}$ l'unité de longueur et divise la taxidistance par $\sqrt{2}$.

Dès lors : $m_u = t_v$ ... ce qui prouve clairement que m_u est une distance, officiellement baptisée MAXIDISTANCE.

20 DISTANCES POINT-DROITE REFORMULEES (en coordonnées orthonormées)

$$d(p_0,p_1;a_0x_0 + a_1x_1 = a_2) \quad = \quad \frac{a_0p_0 + a_1p_1 - a_2}{d((0,0);(a_0,a_1))}$$

$$t(p_0,p_1;a_0x_0 + a_1x_1 = a_2) \quad = \quad \frac{a_0p_0 + a_1p_1 - a_2}{m((0,0);(a_0,a_1))}$$

Reste à calculer $m(p_0,p_1;a_0x_0 + a_1x_1 = a_2)$

Quelle pourrait être une aimable conjecture ?

Considère la forme linéaire $f : \Pi_\circ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x_0\vec{u_0} + x_1\vec{u_1}) = a_0x_0 + a_1x_1$

Tu observeras que $f(\vec{u_0}) = a_0 \qquad f(\vec{u_1}) = a_1$
et que la droite "$a_0x_0 + a_1x_1 = a_2$" $= f^{-1}\{a_2\}$

Ainsi, la deuxième formule ci-dessus peut se réécrire :

$$t_u(p;f^{-1}\{a_2\}) \quad = \quad \frac{f(p) - a_2}{max\{|f(\vec{u_0})|,|f(\vec{u_1})|\}}$$

où une insistance est marquée sur la base u qui définit la taxidistance.

On voit très facilement que :

$$t_v(p;f^{-1}\{a_2\}) \quad = \quad \frac{f(p) - a_2}{max\{|f(\vec{v_0})|,|f(\vec{v_1})|\}}$$

Mais :

$$f(\vec{v_0}) = f(\vec{u_0} + \vec{u_1}) = f(\vec{u_0}) + f(\vec{u_1}) = a_0 + a_1$$
$$f(\vec{v_1}) = f(\vec{u_1} - \vec{u_0}) = f(\vec{u_1}) - f(\vec{u_0}) = a_1 - a_0$$

Dès lors :

$$max\{|f(\vec{v_0})|,|f(\vec{v_1})|\} = max\{|a_0 + a_1|,|a_1 - a_0|\}$$
$$= |a_0| + |a_1|$$

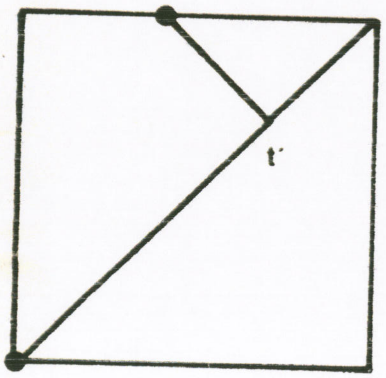
On obtient finalement :

$$m_u(p;f^{-1}\{a_2\}) \quad = \quad t_v(p;f^{-1}\{a_2\}) \quad = \quad \frac{a_0p_0 + a_1p_1 - a_2}{|a_0| + |a_1|}$$

et, dans la notation initiale :

$$m(p_0,p_1;a_0x_0 + a_1x_1 = a_2) \quad = \quad \frac{a_0p_0 + a_1p_1 - a_2}{t((0,0);(a_0,a_1))}$$

MAXIMETRIE



$t' = m\sqrt{2}$

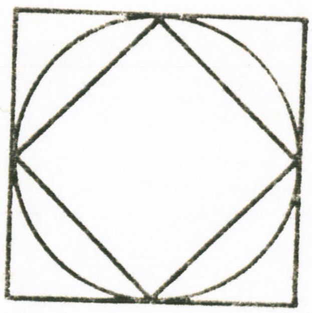
t' est la taxidistance $\times$

m est une distance (EX 158)

m $\triangleq$ Maxidistance $+$

La maxidistance $+$ m est définie par :

La fonction $m : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+$ définie par $m((x,y),(x',y')) = \max\{|x-x'|, |y-y'|\}$ est une distance sur $\mathbf{R}^2$ (appelée *maxidistance* de $\mathbf{R}^2$).



EUCLIPLAN, TAXIPLAN, MAXIPLAN

En le plan Π , notant

e = distance euclidienne

t = taxidistance

m = maxidistance

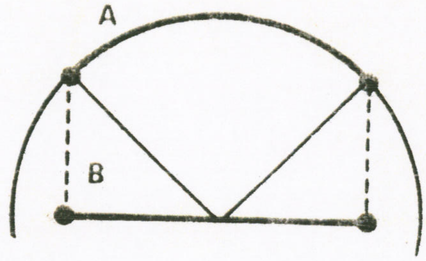
$\boxed{m \leq e \leq t}$

Avec les notations d'EX 1.2 : $m \leq e \leq \sqrt{2}m$ et $e \leq t \leq \sqrt{2}e$.

Distance euclidienne, taxidistance et maxidistance définissent *même* topologie.

Plan euclidien et taxiplan sont homéo et non isométriques.

Taxiplan et maxiplan sont isométriques et donc homéo.



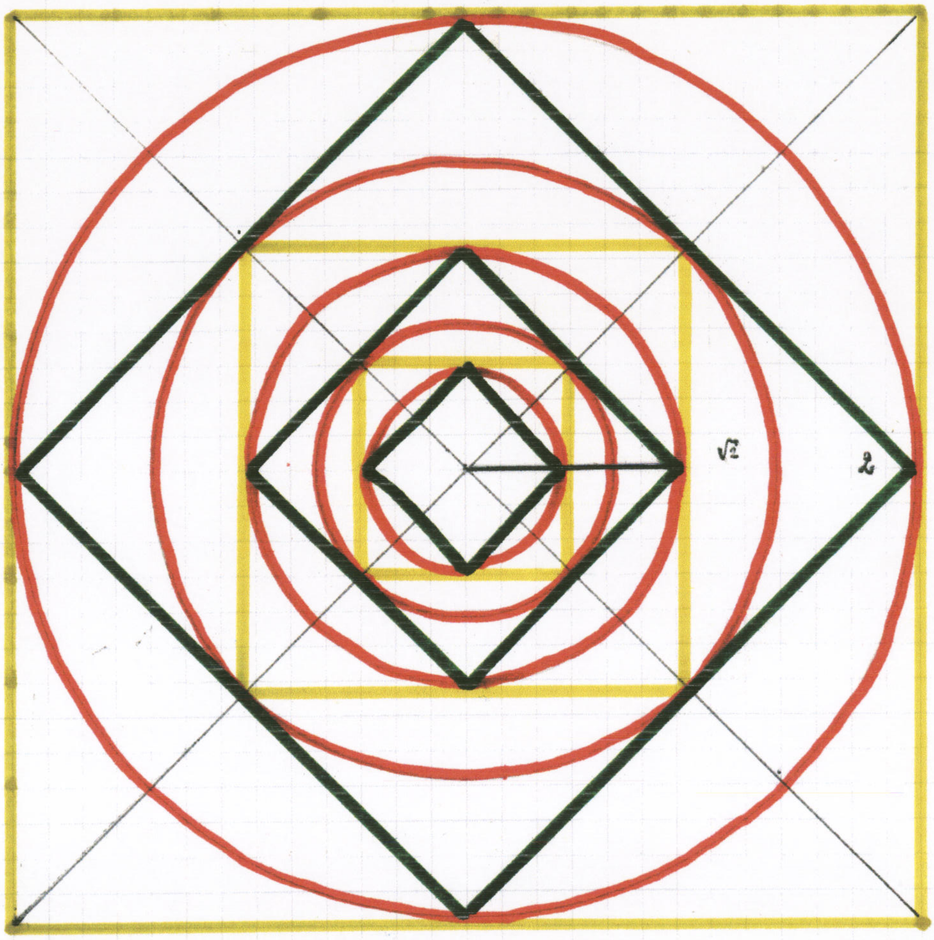
La projection p: A → B est une bijection.
Montrer qu'il s'agit d'une isométrie A,m → B,m = B,e
(où m est la maxidistance et e la distance euclidienne).

▸ Points (x_0, y_0) et $(x, y) \in A$ avec $x_0 \leq x$ *(pour fixer les idées!)*

* $x_0^2 + y_0^2 = r^2 = x^2 + y^2$ et $|x_0| \leq y_0 \geq 0$ et $|x| \leq y \geq 0$

$$x^2 - x_0^2 = y_0^2 - y^2$$
$$|x^2 - x_0^2| = |y_0^2 - y^2|$$
$$|x - x_0| . |x + x_0| = |y - y_0|(y_0 + y)$$
$$|x - x_0|(|x| + |x_0|) \geq |y - y_0|(y_0 + y)$$

$|x| + |x_0| \leq y_0 + y$ *entraîne donc* $|x - x_0| \geq |y - y_0|$



$$A(c,2r) \supset B(c,2r) \supset T(c,2r) \supset B(c,\sqrt{2}\,r) \supset A(c,r) \supset B(c,r) \supset T(c,r) \supset B\left(c,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,r\right) \supset A\left(c,\tfrac{1}{2}\,r\right)$$

$$A_a(c,2r)$$
$$\shortparallel$$
$$A_{\frac{1}{2}a}\left(c,\tfrac{2}{2}r\right) = A_{\frac{1}{2}a}(c,r)$$

$$\tfrac{1}{2}a < \tfrac{1}{2}d < \tfrac{1}{2}t < \tfrac{1}{\sqrt{2}}d < a < d < t < \sqrt{2}\,d < 2a < 2d < 2t$$

ISOMETRIES et HOMEOS

▶ Voici des espaces métriques E,d et E',d'

* Toute application $f:E \to E'$ *qui respecte la distance,*
c'est-à-dire telle que $\forall\, x,y \in E \quad d(x,y) = d'(fx,fy)$

est *injective* ■

Donc, en bref,

ISOMETRIE = *Surjection qui respecte la distance.*

Toute isométrie $E,d \to E',d'$ est un homéo $E,\mathcal{C}_d \to E',\mathcal{C}_{d'}$

La topologie d'un espace métrique binaire (Cf. EX 71) est l'ensemble de ses parties.

SI E,d est un métrique binaire , ALORS $\mathcal{C}_d = \mathcal{P}E$.

Pour tout ensemble E , l'ensemble $\mathcal{P}E$ est une topologie sur E
et même la plus grande des topologies sur E .
La topologie $\mathcal{P}E$ est appelée DISCRETE (ou MAXIMA) sur E .
L'espace $E,\mathcal{P}E$ est encore dit *discret.*
La topologie de tout métrique binaire est discrète.
Les espaces discrets $E,\mathcal{P}E$ et $F,\mathcal{P}F$ sont isomorphes *ssi* $E \# F$.
En espaces discrets homéomorphes : *Bijection = Homéo* .

$^A B$ = ensemble des fonctions de A DANS B.

En $^A B$ où $B, \leqslant$ est un ordonné

$f \leqslant g$ ssi $\forall x \in A \quad f(x) \leqslant g(x)$

$f < g$ ssi $f \leqslant g$ et $f \neq g$

Si d et d* sont distances sur E

Alors si $d \leqslant d^*$

alors $\forall\, c \in E \quad \forall\, r \in \mathbb{R}_0^+ \quad B_d(c,r) \supset B_{d^*}(c,r)$

$$* \quad x \in B_{d^*}(c,r) \Rightarrow d^*(c,x) < r$$

$$d(c,r) \leqslant d^*(c,r) < r$$

$$d(c,r) < r$$

$$x \in B_d(c,r)$$

Réciproque

Si d et d* sont distances sur E

Alors si $\forall\, c \in E \quad \forall\, r \in \mathbb{R}_0^+ \quad B_{d^*}(c,r) \subset B_d(c,r)$

alors $d \leqslant d^*$

Par absurde : si $\exists\, x,y \in E \quad d(x,y) > d^*(x,y)$

soit $r = d(x,y)$

$$B_d(x,r) \supset B_{d^*}(x,r)$$

$$y \notin B_d(x,r) \Rightarrow y \notin B_{d^*}(x,r)$$

or $d^*(x,y) < r$ d'où $y \in B_{d^*}(x,r)$ CTD !

Si d et d* sont distances sur E

alors $d \leqslant d^*$ ssi $\forall\, c \in E \ \forall\, r \in \mathbb{R}_0^+ \quad B_d(c,r) \supset B_{d^*}(c,r)$

Si d et d* sont distances sur E

Si $\exists\, r \in \mathbb{R}_0^+ \quad rd^* \leqslant d$

Alors $B_{rd^*}(c,s) \supset B_d(c,s)$

or $B_{rd^*}(c,s) = B_{d^*}(c,\frac{s}{r})$

d'où $B_{d^*}(c,\frac{s}{r}) \supset B_d(c,s)$

$$x \in \mathrm{int}_{d^*} P \Rightarrow \exists\, s \quad B_{d^*}(x,s) \subset P$$

$$\exists\, s \quad B_{rd^*}(x,rs) \subset P$$

$$\exists\, s \quad B_d(x,rs) \subset B_{rd^*}(x,rs) \subset P$$

$$\exists\, s \quad B_d(x,rs) \subset P$$

$$x \in \mathrm{int}_d P$$

$$\mathrm{int}_{d^*} \subset \mathrm{int}_d$$

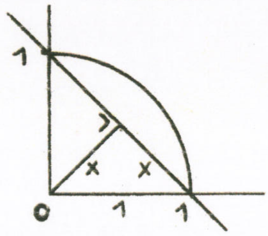
si d et d' sont deux distances sur E

si r et s sont deux réels strictement positifs

alors si $r\,d' \leqslant d \leqslant s\,d'$

alors $\mathcal{T}_{d'} = \mathcal{T}_d$

en d'autres termes, les deux espaces métriques E,d et E,d' (distincts) engendrent même topologie sur E



par PYTHAGORE, il vient $2\,x^2 = 1$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d'où $B_d(c,\frac{\sqrt{2}}{2}r) \subset B_t(c,r)$

or $B_d(c,\frac{\sqrt{2}}{2}r) = B_{\sqrt{2}\,d}(c,r)$

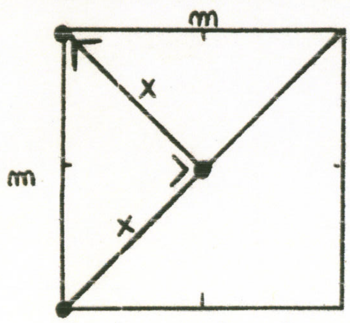
ce qui entraîne $t \leqslant \sqrt{2}\,d$

et il est trivial que $d \leqslant t$

dès lors $d \leqslant t \leqslant \sqrt{2}\,d$

Taxidistance et distance euclidienne engendrent même topologie sur $\mathbb{R}^2$

<u>Une propriété de géométrie plane</u> :



dans le triangle rectangle, il vient $m^2 = h.x$

or $h^2 = 2\,m^2$

il vient $h = \sqrt{2}\,m$

d'où $\dfrac{m\sqrt{2}}{2} = x$

si t' est la taxidistance sur les directions,

alors il vient $t'(a,b) = x + x = m\sqrt{2}$

INTERACTIONS

L'importance de l'opulente *structure-mère* $\mathbf{R}, +, \cdot, \leq, d_{us}, \mathcal{T}_{us}$ est attestée par la variété de ses faces catégorielles (ou structurelles)

CHAMP	ORDONNE TOTAL	ESPACE METRIQUE	ESPACE TOPOLOGIQUE
$\mathbf{R}, +, \cdot$	$\mathbf{R}, \leq$	$\mathbf{R}, d_{us}$	$\mathbf{R}, \mathcal{T}_{us}$

La *structure de champ* provient de l'interaction d'une structure additive
et d'une structure multiplicative.

L'interférence CHAMP - ORDONNE TOTAL produit l'harmonieuse structure de champ ordonné

$$\mathbf{R}, +, \cdot, \leq$$

La topologie réelle usuelle $\mathcal{T}_{us}$ est définie par l'ordre total $\leq$ et la distance usuelle d_{us} (fournie par la formule $d_{us}(x,y) = |x-y|$ qui la raccorche à la structure de groupe ordonné

$$\mathbf{R}, +, \leq\ )$$

EX 1. Voici des distances d_0, d_1 sur l'ensemble E.
Nous écrirons $d_0 \llcorner d_1$ (ou $d_1 \lrcorner d_0$)

SS'il existe $k \in \mathrm{R}^+$ tel que $d_0 \leqslant k d_1$.

En cette éventualité, k est nommé *constante de Lipschitz* du couple d_0, d_1.
Définir *constante de Lipschitz minima d'un tel couple*.
La relation $\llcorner$ définie dans l'ensemble des distances sur E est *réflexive* et *transitive*, c'est-à-dire un *préordre*.
Exhiber les distances d_0, d_1 (sur un même ensemble) telles que l'on n'ait ni $d_0 \llcorner d_1$, ni $d_1 \llcorner d_0$.
Trouver les distances d_0, d_1 (sur un même ensemble) telles que

$$d_0 \llcorner d_1 \llcorner d_0 \quad \text{et} \quad d_0 \neq d_1 \tag{1}$$

Au lieu de (1) on écrit encore $d_0 \sqcup d_1$.

EX 2. En cet exercice et les suivants, d_0 et d_1 sont des distances sur un même ensemble E et $\mathcal{T}d_0$, $\mathcal{T}d_1$ les topologies sur E définies par ces distances.
Montrer que

$$d_0 \llcorner d_1 \Rightarrow \mathcal{T}_{d_0} \subset \mathcal{T}_{d_1}$$

d'où

$$d_0 \sqcup d_1 \Rightarrow \mathcal{T}_{d_0} = \mathcal{T}_{d_1}$$

EX 3.

$$d_0 \llcorner d_1 \Rightarrow (d_1 \text{ rectifiabilité} \Rightarrow d_0\text{-rectifiabilité})$$

$$d_0 \sqcup d_1 \Rightarrow (d_1 \text{ rectifiabilité} = d_0\text{-rectifiabilité})$$

EX 4. Désignant par e, t les distances euclidienne et taximétrique (orthogonales) du plan π: $e \sqcup t$ d'où
taxirectifiabilité = rectifiabilité (euclidienne).

EX 5. Voici des espaces topologiques $E_0, \mathfrak{T}_0$ et $E_1, \mathfrak{T}_1$

$$\{T_0 \times T_1 \mid T_0 \in \mathfrak{T}_0 \quad \text{et} \quad T_1 \in \mathfrak{T}_1\}$$

est la base d'une topologie $\mathfrak{T}$ sur $E_0 \times E_1$ que l'on appelle assez dangereusement, (d'un point de vue étroitement ensembliste) la topologie produit des topologies $\mathfrak{T}_0$ et $\mathfrak{T}_1$.

E_0, E_1, $E_0 \times E_1$ notant $E_0, \mathfrak{T}_0$; $E_1, \mathfrak{T}_1$; $E_0 \times E_1, \mathfrak{T}$; on dira par abus de langue que $\mathfrak{T}$ est la topologie de $E_0 \times E_1$ (toujours muni de la topologie produit, sauf avis contraire exprès).

Pour toutes bases $\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1$ de $\mathscr{T}_0, \mathscr{T}_1$ l'ensemble

$$\{\mathscr{B}_0 \times \mathscr{B}_1 \mid B_0 \in \mathscr{B}_0, B_1 \in \mathscr{B}_1\}$$

est une base de la topologie produit.

EX 6. Voici des espaces métriques E_0, d_0 et E_1, d_1.

Notons $t = d_0 + d_1$ la distance sur $E_0 \times E_1$ définie par

$$t\big((x_0,x_1)(y_0,y_1)\big) = d_0(x_0 y_0) + d_1(x_1 y_1)$$

Définir de même $e = \sqrt{d_0^2 + d_1^2}$.

Montrer que t, e sont des distances sur $E_0 \times E_1$ telles que $t \sqcup e$.

La topologie $\mathfrak{T}_t = \mathfrak{T}_e$ qu'elles définissent sur $E_0 \times E_1$ est la topologie produit des topologies $\mathfrak{T}_{d_0}$ et $\mathfrak{T}_{d_1}$.

EX 7. Généraliser la taxidistance aux espaces euclidiens de dimension n.

EX 8. La taxidistance R_n est définie par $t(x,y) = \Sigma_i \mid x_i - y_i \mid$.