

# La mesure des angles et les fonctions circulaires de variable réelle

par PAPY

## 1. Problème

*A partir de la connaissance élémentaire des réels, du vectoriel euclidien plan et de la taxidistance, résoudre au niveau secondaire, la question de la mesure des angles, établir la formule fondamentale  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$ , introduire les fonctions circulaires analytiques et leurs règles de dérivation.*

## 2. Avertissement

Il n'est pas possible, dans le cadre d'un article, de s'occuper des développements internes d'un tel programme. Nous nous bornerons donc à examiner tous les points qui posent un véritable problème de méthodologie mathématique.

## 3. Idée maîtresse

Mesurer des angles c'est mesurer des arcs de cercle.

Mesurer les sous-arcs fermés d'un arc  $A$  plongé dans un espace métrique,  $E, d$  c'est munir  $A$  d'une métrique  $d'$  subordonnée à  $d$ . Mais l'arc  $A$ , comme partie de  $E, d$  est ipso facto muni de la distance que constitue la restriction  $d_A$  de  $d$  à  $A$ .

*Par vocation, le problème munit le même ensemble de plusieurs métriques, et consiste, avant tout, en JEUX DE MÉTRIQUES.*

#### 4. Espace métrique $E, d$

≙ Ensemble  $E$ , muni d'une *distance*  $d$ .

$a, b, c \in E$
$d(a, b)$ est un réel $\geq 0$
$d(a, b) = d(b, a)$
$d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$
Distance $d$ sur l'ensemble $E$

inégalité triangulaire

EX 1. En  $\mathbf{R}$   $d(x, y) = |x - y|$

EX 2. En  $\mathbf{C}$   $d(x, y) = |x - y|$

EX 3. En l'ensemble  $E$ :

$$\forall x, y \in E: (x \neq y \Rightarrow d(x, y) = 1) \quad \wedge \quad x = y \Rightarrow d(x, y) = 0)$$

#### 5. Plan euclidien

Le plan euclidien est un espace métrique  $\Pi, e$  où  $e$  désigne la distance euclidienne usuelle « à vol d'oiseau ».

(Par plan euclidien, on entend donc ici, un plan euclidien *muni d'une unité de longueur!*).

#### 6. Plan taximétrique

≙ Plan  $\Pi$  muni d'une distance  $t$ , appelée *taxidistance*, et *subordonnée* à la distance euclidienne  $e$  de la manière que voici.

On s'est donné dans  $\Pi$ , deux directions orthogonales privilégiées et

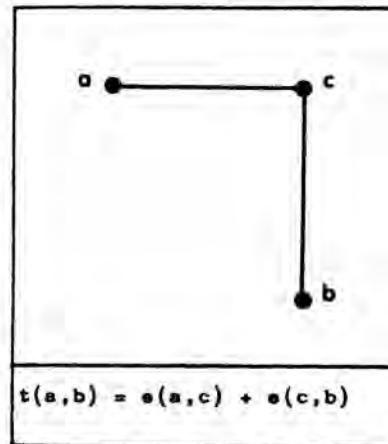


FIG. 1

Nous disons que la taxidistance est *subordonnée* à la distance euclidienne parce qu'elle est définie à partie de la distance euclidienne et de certaines données (deux directions orthogonales). C'est la taxidistance que marque le taximètre d'une limousine allant, par un plus court chemin, de  $a$  à  $b$ , en la ville d'Orthopolis, dont toutes les avenues sont parallèles et perpendiculaires à toutes les rues. [EM2][EM3][tx].

## 7. Taximétriques obliques

Distance marquée par le taximètre d'une voiture allant, par un plus court chemin, de  $a$  en  $b$ , en la ville de SCHEEFSTAD où rues et avenues définissent des directions (non orthogonales).

## 8. Sous-espace métrique

Voici un espace métrique  $E, d$  et une partie  $P \subset E$ . La restriction  $d_P$  de  $d$  à  $P$  (définie par  $\forall x, y \in P \ d_P(x, y) = d(x, y)$ ) est une *distance sur  $P$* , qui s'érige en sous-espace métrique  $P, d_P$ , encore appelé *sous-espace métrique de  $E, d$  défini par  $P$* . Comme  $d_P$  est entièrement définie par  $d$  et  $P$ , on allège la surabondante information  $P, d_P$  en mettant  $P, d$  pour  $P, d_P$ .

## 9. Distance euclidienne et taxidistance de $\mathbf{R}^2$

L'usage appelle *distance euclidienne* (notée  $e$ ) de deux points de  $\mathbf{R}^2$  la distance des points d'un vectoriel euclidien plan qu'ils repèrent en base orthonormée.

Par *taxidistance de  $\mathbf{R}^2$* , nous entendons la taxidistance, notée  $t$ , subordonnée à  $e$  et relative aux directions orthogonales définies par le repère précité:

$$e((a,b)(x,y)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$t((a,b)(x,y)) = |x-a| + |y-b|$$

## 10. Espaces métriques totalement ordonnés

Voici un espace métrique totalement ordonné  $E, d, \leq$ .

Pour tout couple  $a \leq b$  d'éléments de  $E$  notons  $S_{ab}$  l'ensemble des suites finies croissantes

$$s = (a = s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_{n-1} = b)$$

d'éléments de  $E$  et pour chacune d'elles posons

$$|s| = d(s_0, s_1) + \dots + d(s_{n-2}, s_{n-1})$$

et finalement

$$d_{\leq}(a,b) \triangleq d_{\leq}(b,a) \triangleq \sup \{ |s| \mid s \in S_{ab} \} \quad (1)$$

le sup étant pris dans  $\bar{\mathbf{R}}$

$$d_{\leq}(a,b) \triangleq d\text{-longueur de l'intervalle } [a,b] \text{ de } E, \leq$$

(On écrit encore  $d_{\leq}(a,b) = \text{long}_d[a,b]$ . Quand aucune ambiguïté n'en résulte, on parlera de *longueur*, sans référence à  $d$ ).

$E, d, \leq$ RECTIFIABLE	SSI	$E, \leq$ $d$ -rectifiable	SSI	$\forall a, b \in E \ d_{\leq}(a,b) \in \mathbf{R}$
-----------------------------	-----	-------------------------------	-----	---

□ Si  $E, d, \leq$  est rectifiable (3)

Alors  $d_{\leq}$  est une distance sur  $E$ , appelée *distance subordonnée à  $d$  selon  $\leq$* .  
De plus

$$d \leq d_{\leq} = d_{\geq} \quad \text{ET} \quad a \leq b \leq c \Rightarrow d_{\leq}(a,c) = d_{\leq}(a,b) + d_{\leq}(b,c) \quad (1)$$



(1) Le signe  $\triangleq$  indique que l'égalité en question est une définition.

(2) Les petits triangles d'un encadré signalent qu'il constitue une définition.

(3) Le signe □ introduit une proposition. Comme de coutume le carré ■ marque la fin d'une démonstration, ou signale qu'elle est laissée au soin du lecteur.

□ Si l'ordonné total  $E, \leq$  est muni des distances  $d' \leq d''$

Alors la  $d''$ -rectifiabilité de  $\leq$  entraîne sa  $d'$ -rectifiabilité et  $d'_\leq \leq d''_\leq$  ■

Pour tout ordre total  $\leq$  de domaine  $P$  inclus dans l'espace métrique  $E, d$

$\leq$  est  $d$ -rectifiable  $\stackrel{\blacktriangle}{\Leftrightarrow} \leq$  est  $d_P$ -rectifiable. <sup>(1)</sup>

### 11. Taxirectifiabilité de fonctions $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ (avec $a, b \in \mathbf{R}$ )

Toute fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  est naturellement munie d'un ordre total

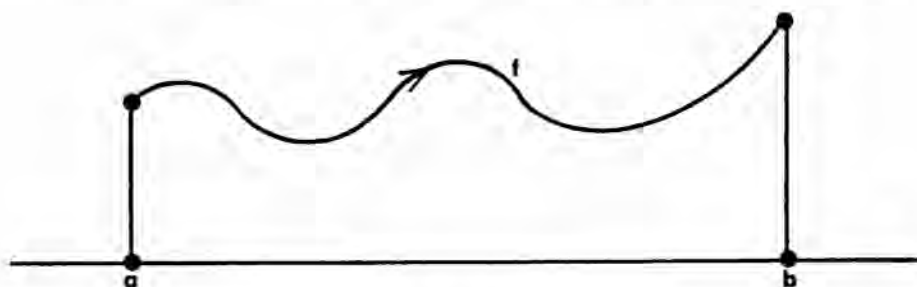


FIG. 2

*En taximétrie*

$f$  est taxirectifiable  $\stackrel{\blacktriangle}{\Leftrightarrow}$  son ordre est taxirectifiable

taxilongueur de  $f \stackrel{\blacktriangle}{=} \text{taxilongueur de son ordonné}$

*En métrique euclidienne*

$f$  est rectifiable  $\stackrel{\blacktriangle}{\Leftrightarrow}$  son ordre est rectifiable

longueur de  $f \stackrel{\blacktriangle}{=} \text{longueur de son ordonné}$

□ *Toute fonction croissante (resp décroissante)  $f[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  est taxirectifiable et sa taxilongueur égale la taxidistance de ses extrémités.*

\* Pour chacune des suites  $s$  (§ 10) <sup>(2)</sup>

$$|s| = \text{taxidistance des extrémités de } f$$

<sup>(1)</sup> Le symbole  $\stackrel{\blacktriangle}{\Leftrightarrow}$  signale que la biimplication en question est une définition.

<sup>(2)</sup> L'étoile \* marque le début d'une démonstration ... ou un rebondissement de celle-ci.

## 12. Rectifiabilité des arcs de cercle

Par la section précédente

*Tout quart de cercle de rayon  $r$  est taxirectifiable et de taxilongueur  $2r$ .*

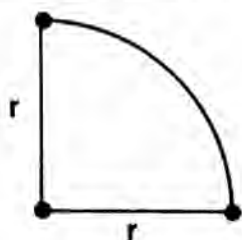


FIG. 3

D'où

$$\text{taxi-}\pi = 4$$

Dès lors, par le théorème 10.2

*Tout quart de cercle est (euclidiennement) rectifiable et  $\pi \leq 4$ . Mais*



FIG. 4

et compte tenu de la définition de  $d_{\leq}$  à partir de  $d$

$$3 \leq \pi \leq 4$$

## 13. Topologie

L'ensemble des disques ouverts usuels <sup>(1)</sup>

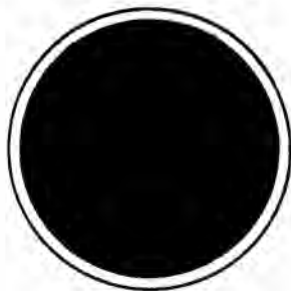


FIG. 5

<sup>(1)</sup> Ces dessins constituent la transposition en blanc et noir de la convention vert-rouge introduite en [MM1]. Ils veulent donc figurer le disque et le carré privés de leurs bords.

et l'ensemble des *carrés ouverts*



FIG. 6

sont *deux* bases de la topologie usuelle  $\mathcal{Z}_{us}$  du plan  $\pi$

Or ces  $\odot$  sont les *disques ouverts euclidiens* et ces  $\blacklozenge$  sont les *taxidisques ouverts*.

Donc:

*La distance euclidienne  $e$  et toute taxidistance  $t$  de  $\pi$  définissent la topologie usuelle  $\mathcal{Z}_{us}$  de  $\pi$ .*

Pour toute partie  $P$  de  $\pi$ , les taxidisques ouverts  $\blacklozenge$  tracent sur  $P$  une base de la topologie du sous-espace de  $\pi, \mathcal{Z}_{us}$  défini par  $P$ .

#### 14. Angles

Nous savons [MM6] que le cercle unité pointé  $\Gamma$

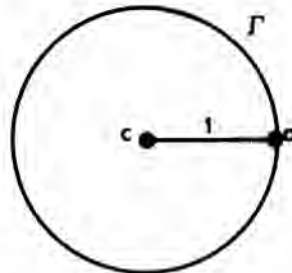


FIG. 7

représente bijectivement l'ensemble des angles: le point  $p \in \Gamma$  figure l'angle de la rotation de centre  $c$  qui applique  $o$  sur  $p$ . Ce qui permet d'identifier souvent  $\Gamma$  à l'ensemble des angles

$\Gamma = \text{Ensemble des angles}$
---------------------------------------

Nous savons [F3] qu'une fonction  $f$  de segment réel fermé dans  $\mathbf{R}$  est continue ssi  $[a,b] \rightarrow f: x \mapsto (x,fx)$  est un homéo. Il suit que le demi-cercle fermé  $D$  et le quart de cercle  $Q_1$



FIG. 8

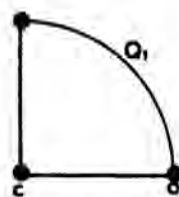


FIG. 9

sont homéomorphes à des segments réels fermés non singletons, c'est-à-dire des arcs de Jordan fermés (non singletons). Une base de la topologie du demi-cercle  $D$  est constituée par les intervalles ouverts de l'ordonné total  $D, \leq$ . Une base de la topologie de  $D$  est constituée des traces sur  $D$  des taxidisques ouverts.

Peu importe, momentanément que

$$\text{intervalle ouvert de } D, \leq = \text{trace de taxidisque ouvert sur } D.$$

## 15. Rectification du quart de cercle

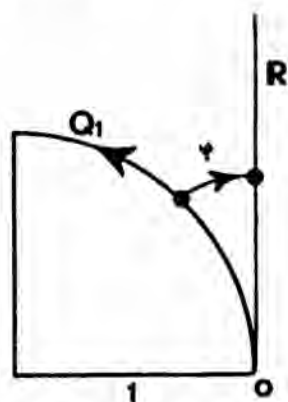


FIG. 10

La fonction  $\varphi: Q_1 \rightarrow \mathbf{R}: p \rightarrow$  longueur (euclidienne) de l'intervalle  $[op]$  est strictement croissante, en vertu de 10(1). Sa continuité est évidente:

Pour tout voisinage  $W = ]\varphi p - \varepsilon, \varphi p + \varepsilon[$  de  $\varphi p$ , la trace sur  $Q_1$  du taxidisque de centre  $p$ , et de rayon  $\varepsilon$  est un voisinage  $V$  de  $p$  tel que  $\varphi V \subset W$  ■



Mais  $Q_1$  étant homéomorphe à un segment réel fermé, le théorème des valeurs intermédiaires [Arlon 8], s'applique

$\varphi$ est une surjection	$Q_1 \rightarrow [0; \pi/2]$
un iso d'ordonnés	$Q_1, \leq \rightarrow [0; \pi/2], \leq$
un homéo	$Q_1, \zeta_e \rightarrow [0; \pi/2], \zeta_{us}$
un iso d'espaces métriques	$Q_1, e_{\leq} \rightarrow [0; \pi/2], d_{us}$

( $\zeta_{us}$  désigne la topologie usuelle de l'intervalle fermé  $[0, \pi/2]$  et  $d_{us}$  note la distance usuelle de ce segment:  $d_{us}(r, s) = |r - s|$ )

$\varphi$  rectifie le quart de cercle

### 16. Un vieux paradoxe

L'homme a cru sa terre plate parce qu'un fragment de sphère semble plan. Le physicien confond volontiers un petit arc et sa corde. Le mathématicien élucide la question

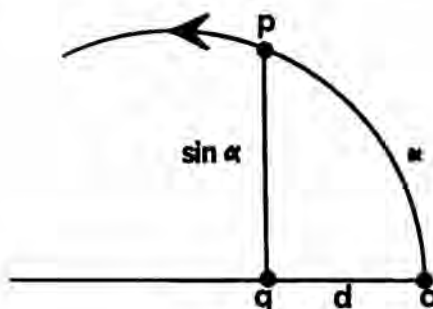


FIG. 11

en établissant la formule fondamentale

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$$

où  $\alpha$  désigne la longueur euclidienne de l'arc  $[op]$  et  $\sin \alpha$ , longueur de  $pq$ , est clairement fonction de  $\alpha$ . Le rapport  $\alpha/\sin \alpha$  est exprimé au moyen du paramètre  $\alpha$ . On aurait pu prendre d'autres paramètres. Pour le calcul

effectif, on exprimera les termes  $\alpha$  et  $\sin \alpha$  de la fraction en fonction du paramètre  $d$ .

Et on calculera  $\lim_0 \frac{\alpha(d)}{(\sin \alpha)(d)}$

### 17. Changement de variable

Le fait que la limite résiste au changement de variable, ne doit être ni escamoté, ni constituer la cause d'explications lourdes. Il suffit de le mettre une bonne fois en évidence, en toute généralité et de l'utiliser ensuite avec souplesse sans référence freinante.

Voici deux espaces topologiques  $A, B$  liés par un homéo  $h$  noté par une ligne non fléchée afin de n'avantager ni l'un ni l'autre. Le petit muret indique que les dessins sont tracés en chambres séparées, sans tenir compte de leurs incidences éventuelles. (Dans le cas traité en 16, les espaces  $A$  et  $B$  égalent  $\mathbf{R}, \mathcal{Z}_{us}$ ).

Les fonctions  $f:A \rightarrow T; g:B \rightarrow T$ ; à valeurs dans un espace topologique  $T$  sont liées par l'homéo  $h$ .

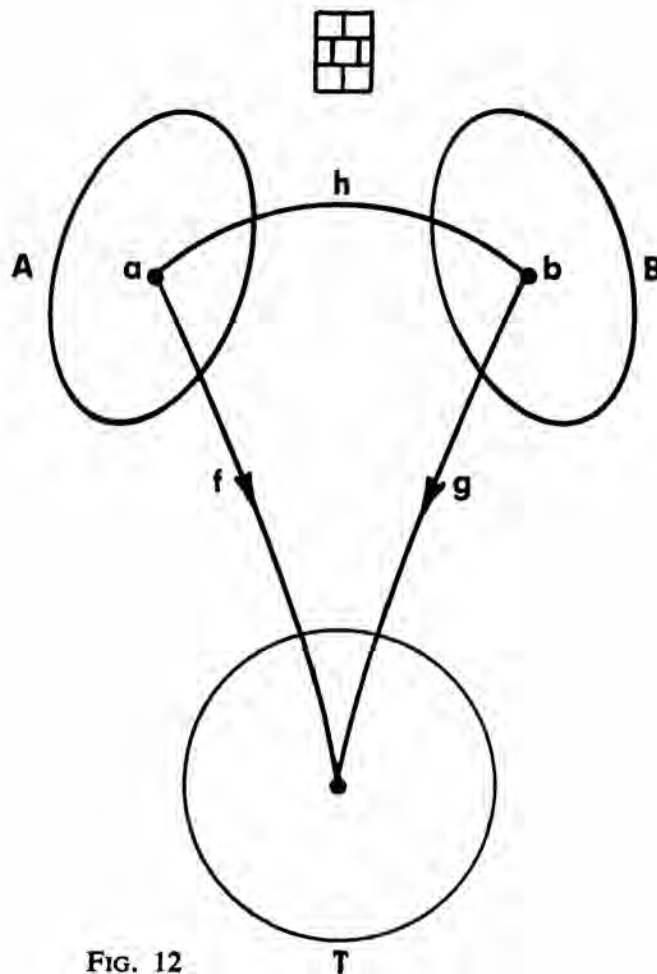


FIG. 12 T

L'homéomorphie  $h$  est un isomorphisme appliquant chacune des SITUATIONS

$$f: A, a \rightarrow T \quad g: B, b \rightarrow T \quad \text{sur l'autre.}$$

(Le phénomène est *paramétré* tantôt par  $A, a$  et tantôt par  $B, b$ ). Clairement

$$\lim_a f = \lim_b g$$

Un point, c'est tout!

18.  $\lim \alpha / \sin \alpha = 1$

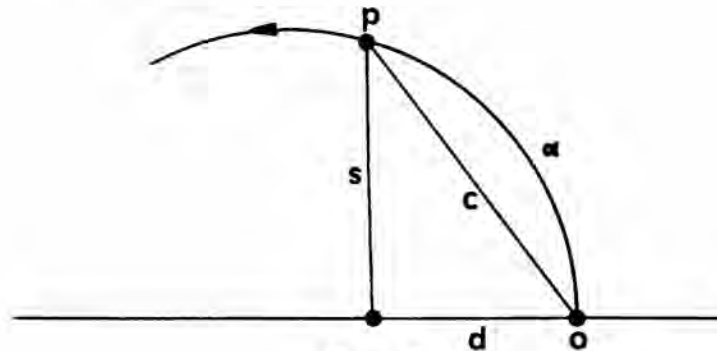


FIG. 13

distance euclidienne $e(o,p)$	$<$	longueur euclidienne de $[op]$	$\leq$	taxilongueur de $[o,p]$
$s \leq c$		$\leq \alpha \leq$		$s + d$

Jeu de métriques

Nous venons d'utiliser trois distances sur l'arc de cercle  $[o,p]$

On doit prouver  $\lim \frac{\alpha}{s} = 1$

Comme 
$$1 \leq \frac{\alpha}{s} \leq \frac{s+d}{s} = 1 + \frac{d}{s}$$

il revient à établir 
$$\lim \frac{d}{s} = 0$$

ou, ce qui est équivalent 
$$\lim \frac{d^2}{s^2} = 0$$

Dès sa première apparition en [MM3] le produit scalaire établit

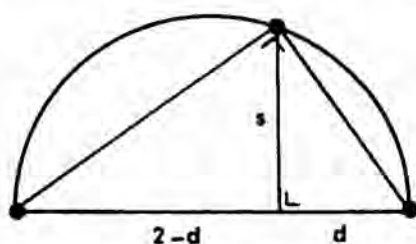


FIG. 14

$$s^2 = d(2 - d)$$

D'où 
$$\lim \frac{d^2}{s^2} = \lim \frac{d^2}{d(2-d)} = \lim \frac{d}{2-d} = \frac{0}{2} = 0$$

### 19. Enroulement

La réciproque  $\varphi^{-1}$  de la rectification  $\varphi: Q_1 \rightarrow [0, \pi/2]$  applique isométriquement  $[0, \pi/2] \rightarrow Q_1, e_{\leq}$  et amorce un enroulement  $\mathbf{R}^+ \rightarrow \Gamma$

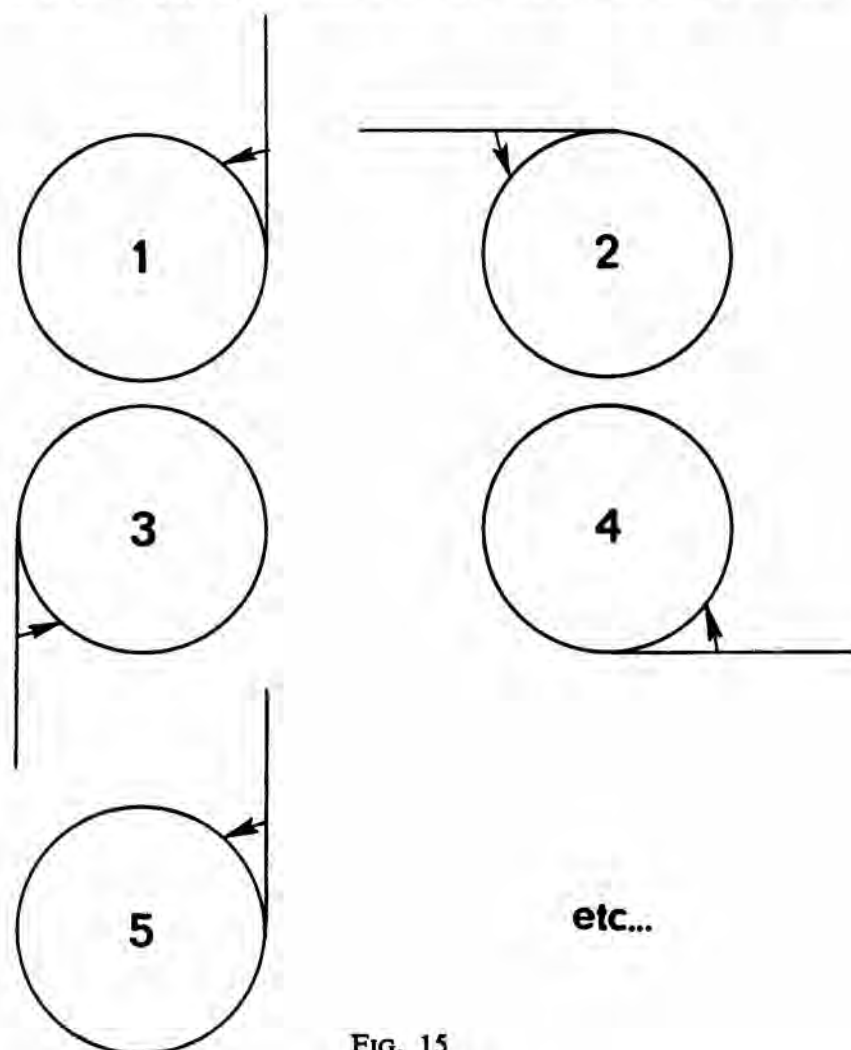


FIG. 15

Calmons la frustration contestataire des réels négatifs en prolongeant cette fonction

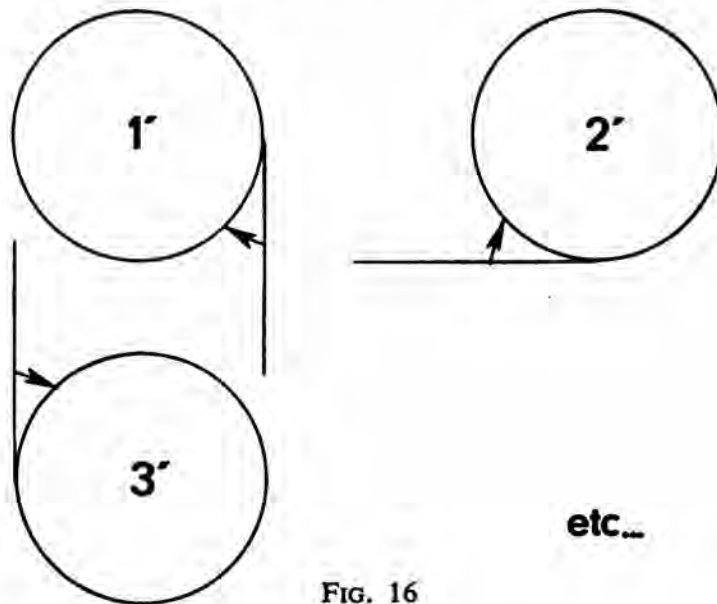


FIG. 16

Ainsi se trouve défini l'enroulement  $\psi: \mathbf{R} \rightarrow \Gamma$  fonction continue de période  $2\pi$ .

Il sera souvent commode de poser  $\hat{r} = \psi r$ .

Ce qui permet l'entrée d'un personnage folklorique, haut en couleur!

$$\hat{1} = 1 \text{ . radian}$$

Plus généralement

$$\hat{r} = r \text{ . rad}$$

$\hat{r}$  est l'angle dont UNE mesure en radians égale  $r$ .

$\{r + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} =$  ensemble des mesures radianses de  $\hat{r}$ .

On a volontairement passé sous silence, ci-dessus, qu'il existe deux enroulements  $\mathbf{R} \rightarrow \Gamma$ .

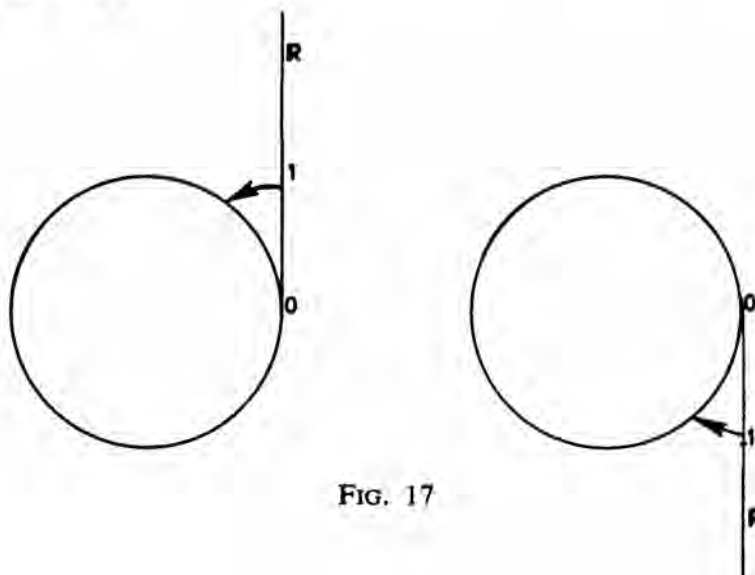


FIG. 17

Nous supposerons toujours qu'un enroulement a été choisi et nommé  $\psi: r \mapsto \hat{r}$ , ce qui équivaut à décider lequel des deux angles droits du plan euclidien admet la mesure radiane  $\pi/2$  (l'autre ayant aussitôt la mesure  $-\pi/2$ ).

## 20. Epimorphisme

Toute fonction continue non monotone d'intervalle réel dans  $\mathbf{R}$  présente l'une ou l'autre des situations

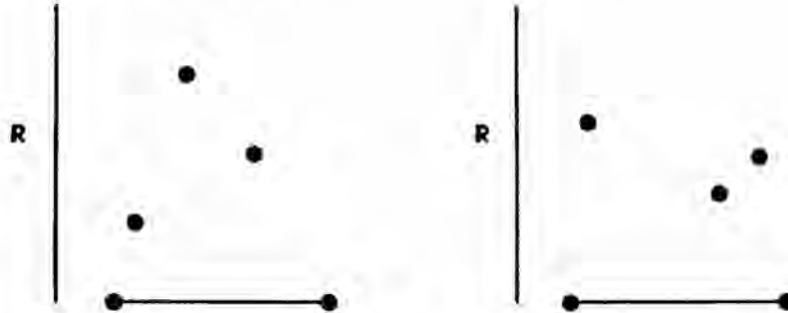


FIG. 18

et le théorème des valeurs intermédiaires lui impose d'être non injective. Aussitôt, pour tout  $s \in [0; \pi/2]$  tout homéo  $h$  du sous-arc  $[\hat{\delta}, \hat{s}]$  du demi-cercle  $D$  sur un sous-arc de ce demi-cercle.

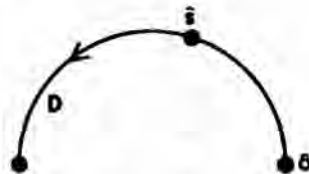


FIG. 19

est croissante ou décroissante, et, toujours par application du théorème des valeurs intermédiaires, son image égale  $[h\hat{\delta}, h\hat{s}]$ . Il en est ainsi en particulier de l'endo  $\hat{r} +$  de  $\Gamma, +$ , supporté par la rotation de centre  $c$  et d'angle  $\hat{r}$ , (avec  $r \in [0, \pi/2]$ ). Mais, en ce cas, le caractère isométrique de la rotation entraîne la conservation des longueurs d'arc.

D'où  $\hat{r} + [\hat{\delta}, \hat{s}] = [\hat{r}, \hat{r} + \hat{s}]$  et  $\text{long} [\hat{r}, \hat{r} + \hat{s}] = s$ .

Pour  $r = s \in ]0, \pi/2]$ :

$$\hat{r} + [\hat{\delta}, \hat{r}] = [\hat{r}, 2\hat{r}] \quad \text{et} \quad \text{long} [\hat{r}, 2\hat{r}] = r$$

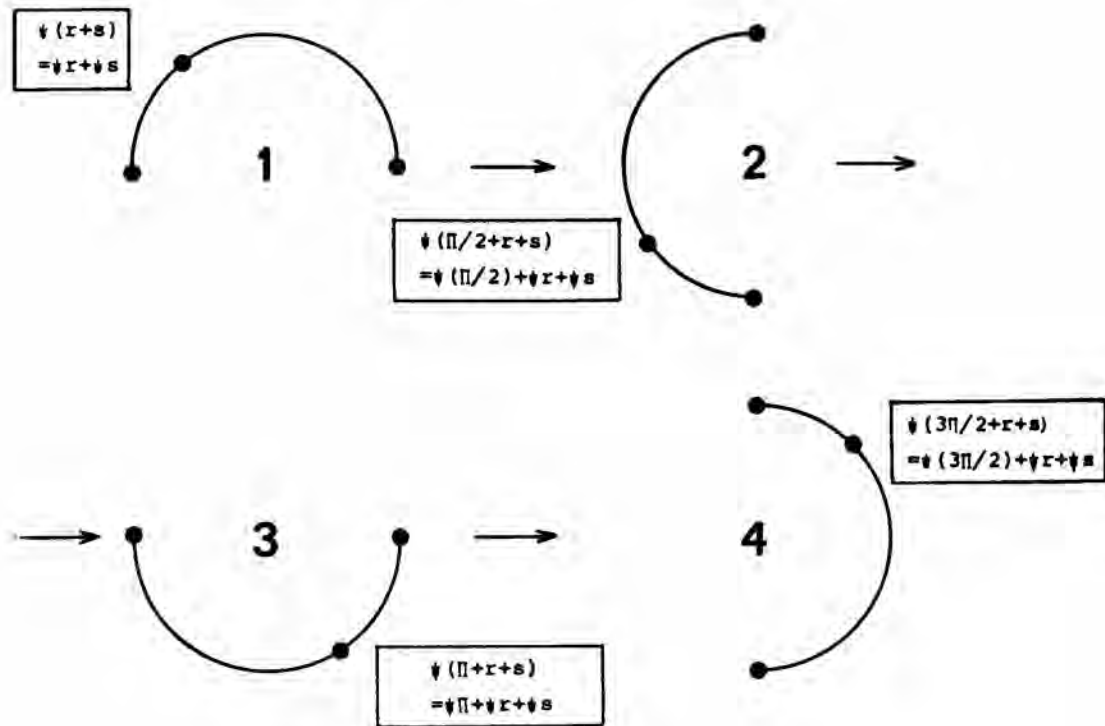
et la dernière égalité impose  $2\hat{r} = \hat{\delta}$  ou  $2\hat{r} = \widehat{2r}$ .

Mais  $\widehat{r}$  n'étant ni nul, ni plat,  $2\widehat{r} \neq \widehat{o}$ , d'où  $2\widehat{r} = \widehat{2r}$ .

On en conclut en particulier que l'application  $\widehat{r} + : [\widehat{o}, \widehat{r}] \rightarrow [\widehat{r}, 2\widehat{r} = \widehat{2r}]$  est croissante stricte. Il en est encore ainsi de la restriction de  $\widehat{r} +$  à  $[\widehat{o}, \widehat{s}]$ , pour tout  $s \in [o, r]$  (et  $r \in [o, \pi/2]$ ). D'où, immédiatement

$$\widehat{r} + [\widehat{o}, \widehat{s}] = [\widehat{r}, \widehat{r} + \widehat{s} = \widehat{r + s}] \quad \boxed{\widehat{r} + \widehat{s} = \widehat{r + s}}$$

Le « quart de tour »  $(\pi/2) +$  définit les isométries



etc...

FIG. 20

De manière générale

$$\begin{aligned} \psi(k\pi/2 + r + s) &= \psi(k\pi/2) + \psi r + \psi s \\ &= k\psi(\pi/2) + \psi r + \psi s \end{aligned}$$

On en déduit successivement, pour tous  $h, k \in \mathbb{Z}$  et tous  $r, s \in [o, \pi/2]$

$$\begin{aligned} &\psi((k\pi/2 + r) + (h\pi/2 + s)) \\ &= \psi((k + h)\pi/2 + (r + s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (k + h)\psi(\pi/2) + \psi r + \psi s \\
&= (k\psi(\pi/2) + \psi r) + (h\psi(\pi/2) + \psi s) \\
&= \psi(k\pi/2 + r) + \psi(h\pi/2 + s)
\end{aligned}$$

ce qui établit le théorème fondamental

————— Théorème de l'enroulement —————

L'enroulement isométrique euclidien  $\psi$  est un épimorphisme du groupe  $\mathbb{R}, +$  sur le groupe des angles  $\Gamma, +$ .

### 21. Fonctions circulaires de variable réelle

Elles se définissent toutes comme le sinus de variable réelle:

$$\sin r = \sin \tilde{r}$$

(En le premier membre *sin* désigne le sinus de variable réelle, tandis qu'en le second *sin* désigne le sinus d'angle)

Notant  $p$  la projection orthogonale numérique

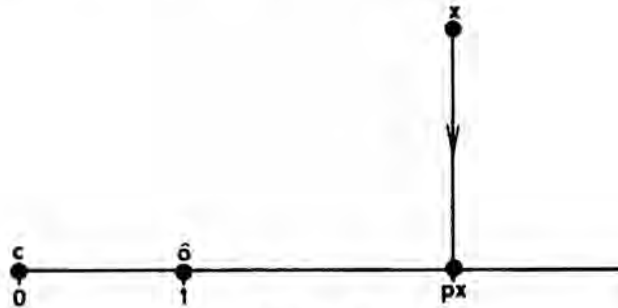


FIG. 21

le cosinus de variable réelle égale  $p \circ \psi$  et le sinus de variable réelle égale  $q \circ \psi$  (avec une définition évidente de  $d$ ), ce qui assure la continuité de ces fonctions circulaires de variable réelle.

Par l'épimorphisme d'enroulement:

$$\sin(x + y) = \sin(\widehat{x + y}) = \sin(\tilde{x} + \tilde{y}) = \dots \text{etc}$$

et toutes les formules relatives aux fonctions circulaires d'angles se transfèrent aux fonctions circulaires de variable réelle. Utilisons l'une d'entre elles pour dériver le sinus de variable réelle.



$$\begin{aligned} \sin' a &= \lim_a \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_a \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} \\ &= \lim_a \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_a \cos \frac{x+a}{2} = \cos a \end{aligned}$$



22. Le dernier carré noir est le point final de l'article. Suivent en forme d'EX des compléments, remarques et exercices.

EX 1. Voici des distances  $d_0, d_1$  sur l'ensemble E.

Nous écrirons  $d_0 \sqsubset d_1$  (ou  $d_1 \sqsupset d_0$ )

SS'il existe  $k \in \mathbb{R}^+$  tel que  $d_0 \leq kd_1$ .

En cette éventualité,  $k$  est nommé *constante de Lipschitz* du couple  $d_0, d_1$ . Définir *constante de Lipschitz minima* d'un tel couple.

La relation  $\sqsubset$  définie dans l'ensemble des distances sur E est *réflexive* et *transitive*, c'est-à-dire un *préordre*.

Exhiber les distances  $d_0, d_1$  (sur un même ensemble) telles que l'on n'ait ni  $d_0 \sqsubset d_1$ , ni  $d_1 \sqsubset d_0$ .

Trouver les distances  $d_0, d_1$  (sur un même ensemble) telles que

$$d_0 \sqsubset d_1 \sqsubset d_0 \quad \text{et} \quad d_0 \neq d_1 \tag{1}$$

Au lieu de (1) on écrit encore  $d_0 \sqsupset d_1$ .

EX 2. En cet exercice et les suivants,  $d_0$  et  $d_1$  sont des distances sur un même ensemble E et  $\zeta_{d_0}, \zeta_{d_1}$  les topologies sur E définies par ces distances.

Montrer que

$$d_0 \sqsubset d_1 \Rightarrow \zeta_{d_0} \subset \zeta_{d_1}$$

d'où

$$d_0 \sqsupset d_1 \Rightarrow \zeta_{d_0} = \zeta_{d_1}$$

EX 3.

$$d_0 \sqsubset d_1 \Rightarrow (d_1 \text{ rectifiabilité} \Rightarrow d_0\text{-rectifiabilité})$$

$$d_0 \sqsupset d_1 \Rightarrow (d_1 \text{ rectifiabilité} = d_0\text{-rectifiabilité})$$

EX 4. Désignant par  $e, t$  les distances euclidienne et taximétrique (orthogonales) du plan  $\pi$ :  $e \sqsupset t$  d'où

$$\text{taxirectifiabilité} = \text{rectifiabilité (euclidienne)}.$$

EX 5. Voici des espaces topologiques  $E_0, \mathcal{Z}_0$  et  $E_1, \mathcal{Z}_1$

$$\{T_0 \times T_1 \mid T_0 \in \mathcal{Z}_0 \text{ et } T_1 \in \mathcal{Z}_1\}$$

est la base d'une topologie  $\mathcal{Z}$  sur  $E_0 \times E_1$  que l'on appelle assez dangereusement, (d'un point de vue étroitement ensembliste) la topologie produit des topologies  $\mathcal{Z}_0$  et  $\mathcal{Z}_1$ .

$E_0, E_1, E_0 \times E_1$  notant  $E_0, \mathcal{Z}_0; E_1, \mathcal{Z}_1; E_0 \times E_1, \mathcal{Z}$ ; on dira par abus de langue que  $\mathcal{Z}$  est la topologie de  $E_0 \times E_1$  (toujours muni de la topologie produit, sauf avis contraire exprès).

Pour toutes bases  $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$  de  $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$  l'ensemble

$$\{\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_1 \mid B_0 \in \mathcal{B}_0, B_1 \in \mathcal{B}_1\}$$

est une base de la topologie produit.

EX 6. Voici des espaces métriques  $E_0, d_0$  et  $E_1, d_1$ .

Notons  $t = d_0 + d_1$  la distance sur  $E_0 \times E_1$  définie par

$$t((x_0, x_1)(y_0, y_1)) = d_0(x_0, y_0) + d_1(x_1, y_1)$$

Définir de même  $e = \sqrt{d_0^2 + d_1^2}$ .

Montrer que  $t, e$  sont des distances sur  $E_0 \times E_1$  telles que  $t \sqsubseteq e$ .

La topologie  $\mathcal{Z}_t = \mathcal{Z}_e$  qu'elles définissent sur  $E_0 \times E_1$  est la topologie produit des topologies  $\mathcal{Z}_{d_0}$  et  $\mathcal{Z}_{d_1}$ .

EX 7. Généraliser la taxidistance aux espaces euclidiens de dimension  $n$ .

EX 8. La taxidistance  $R_n$  est définie par  $t(x, y) = \sum_i |x_i - y_i|$ .

EX 9. Améliorer l'approximation  $3 < \pi < 4$  par une visite à Scheefstad.

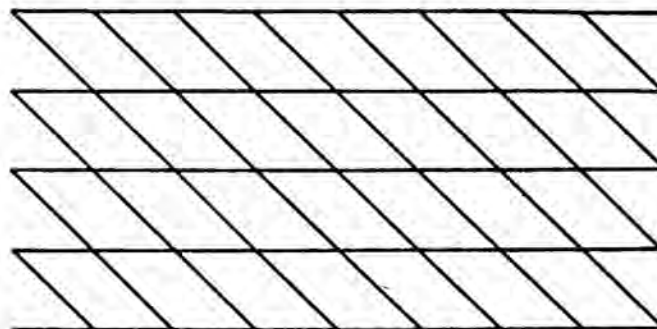


FIG. 22

EX 10.  $s$  désignant la taxidistance à Scheefstad, on a encore  $s \sqsubseteq t \sqsubseteq e$ .

EX 11.

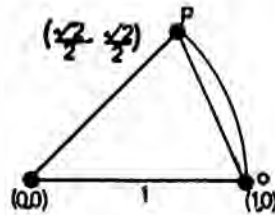


FIG. 23

$$e(o,p) < \frac{\pi}{8}$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}} < \frac{\pi}{8}$$

$$3,046 < \pi$$

EX 12. La longueur euclidienne de l'arc  $[op]$  égale à  $\pi/8$  est majorée par sa longueur taximétrique Scheefstadoise qui égale  $2(\sqrt{2} - 1)$ .

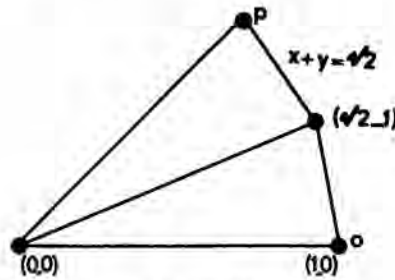


FIG. 24

D'où  $\pi/8 < 2(\sqrt{2} - 1)$  et finalement  $\pi < 3,32$ .

BIBLIOGRAPHIE

DIEUDONNÉ, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (Paris, Herman 1964).  
 PAPY, [MM3] *Voici Euclide!* (Didier. Bruxelles-Paris 1967).  
 PAPY, [MM6] *Géométrie Plane*. (Labor-Didier. Bruxelles-Paris 1967).  
 PAPY, [F3] *Le premier enseignement de l'analyse* (PUB 1968).  
 FRÉDÉRIQUE, [EM2] *Les enfants et la mathématique*. 2<sup>e</sup> vol. (Didier. Bruxelles-Paris 1971).  
 FRÉDÉRIQUE & PAPY, [tx] *Taximétrie* (Hachette. Paris 1973).  
 PAPY, [Arlon 8] *Premières leçons d'analyse mathématique par Frédérique* (Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique, 224, avenue Albert, 1080 Bruxelles. 1966, 2<sup>e</sup> édition 1972).