

# Pédagogie des démonstrations <sup>1</sup>

par

**Georges PAPY,**

**Président du Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique,  
Professeur ordinaire à l'Université Libre de Bruxelles**

---

*Tout exposé mathématique est un chapiteau  
dont les mâts sont des théorèmes reconnus comme fondamentaux.*

*La place de ces mâts n'a rien de fondamentalement immuable.*

*La même tente peut être soutenue par des mâts placés en d'autres endroits.*

*Certains emplacements paraissent plus naturels et plus commodes.*

*La structure générale de l'édifice n'est guère sensible à de petites variations locales  
de la position des mâts.*

*Si l'on supprime les mâts, la toile ne se déchire pas forcément,  
mais le bâtiment peut perdre son harmonie architecturale  
et prendre un aspect informe plus difficile à appréhender.*

*Si on supprime la toile, au contraire,  
il ne reste plus qu'un squelette chétif, rigide et discontinu.*

*La mathématique ne se réduit pas à une collection de théorèmes fondamentaux,  
à un système d'articulations.*

*La toile entre les mâts est partie intégrante de la mathématique elle-même.*

*Cette trame intermédiaire est faite notamment d'exemples et de contre-exemples.*

*Exemplifier et contre-exemplifier, c'est affirmer une filiation,  
c'est énoncer une proposition.*

*Les théorèmes fondamentaux eux-mêmes sont des propositions qui ont réussi dans la vie et se  
sont mises en évidence dans leur société, en sortant de l'anonymat des pelotons. Mais il n'y a  
pas de différence profonde de nature entre les théorèmes mis en exergue et la foule continue  
des propositions.*

*Dans la toile intermédiaire figurent aussi les applications, les corollaires, les illustrations et  
enfin, et surtout, ces suites de propositions qui passent par évidences d'un théorème à l'autre  
et que l'on nomme*

**démonstrations**

\*

---

<sup>1</sup> Il s'agit du texte liminaire du document d'accompagnement remis aux participants de la 16e. Rencontre internationale du Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique, organisée à la Rijksnormaalschool, Berlaarsestraat 35 et au Sint-Ursulalyceum, Kapucijnenvest 10, 2500 LIER, du mardi 5 au vendredi 8 juillet 1977, sur le thème général "*Pédagogie des démonstrations*".

*Pas de chapiteau sans toile.*

*Pas de mathématique sans démonstration.*

*La toile est le but du chapiteau et sa raison d'être.*

*Les mâts sont imaginés et plantés pour soutenir la toile.*

*La mathématique, démonstrative par nature, existe avant que ne se plantent les mâts.*

*L'éducation mathématique des enfants et des adolescents, ou la démarche des adultes s'initiant à de nouveaux domaines, tisse cette toile en exerçant à la **pensée mathématique**, essentiellement faite de démonstrations, de portée éventuellement fort modeste, mais qui permettent de progresser dans l'exploration de situations et dans leur intériorisation.*

*Petit à petit se reconnaît l'importance de propositions initialement confinées au rôle obscur et louable de chevilles ouvrières.*

*Et apparaît le bénéfice éventuel de leur mise en évidence plus ou moins explicite.*

*Et finalement, s'imposent certains exposés charpentés, jalonnés de solides théorèmes.*

\*

*Dans le passé, une telle édification fut réalisée d'abord dans le cadre de la géométrie.*

*Par figure de style, PASCAL parle de l' **esprit de géométrie** pour caractériser l'orientation de la pensée axiomatico-déductive.*

**Quand les définitions sont claires, dit PASCAL,  
les axiomes suivent d'eux-mêmes.**

*Pour PASCAL, la définition d'un concept consiste en son appréhension dans la connaissance commune, avant l'installation de la discipline axiomatico-déductive.*

*Cette discipline revêt l'aspect le plus rigide dans les exposés de logique formelle qui prétendent se borner à jouer avec des assemblages de symboles reproductibles.*

*Certains de ces assemblages sont des termes, interprétables comme dénominations d'objets situés, stricto sensu, en dehors de la théorie elle-même.*

*D'autres assemblages sont des formules interprétables comme des affirmations concernant les objets.*

*Des règles d'inférence précises indiquent comme déduire une nouvelle proposition, de propositions déjà reconnues vraies.*

*La vérification d'une démonstration entièrement formalisée est un calcul purement mécanique effectuable sur ordinateur.*

*L'impossibilité pratique de formaliser entièrement la mathématique est universellement admise.*

*Les formalisations locales, relatives à des domaines restreints, prennent rapidement des proportions qui les mettent hors de portée.*

*Elles seraient d'ailleurs pratiquement illisibles et les exposés de logique formelle utilisent inévitablement une métalangue commune pour expliquer la leur.*

*Cette appréciation n'entraîne nulle condamnation de la logique mathématique en tant que raisonnement sur le raisonnement mathématique.*

*Cet exercice louable a été si fécond qu'il permit de résoudre des problèmes posés depuis longtemps par les mathématiciens.*

\*

*Des hommes ont donné leur vie en luttant pour la liberté, contre le despotisme.*

*La différence entre un régime despotique et une société libérale saute cruellement aux yeux. Et pourtant, il semble totalement impossible d'indiquer une frontière précise séparant le despotisme et la liberté.*

*Le régime le plus despotique est obligé d'accorder certains ballons de liberté.*

*Tout règlement peut être appliqué de manière despotique ou libérale.*

*Le despotisme interdit tout ce que la loi n'autorise pas explicitement.*

*L'interprétation libérale permet tout ce qui n'est pas explicitement défendu par la loi.*

*La mathématique étant une activité éminemment humaine et sociale, faut-il s'étonner que l'on retrouve en son sein cette bipolarisation entre despotisme et liberté ?*

*En mathématique, le despotisme régit les formalismes.*

*Le calcul élémentaire et le jeu d'échecs sont des exemples de formalismes.*

*Le règlement des échecs énumère les seuls mouvements permis aux cavaliers. L'exemple du jeu d'échecs comme celui de la théorie des nombres montrent d'ailleurs que l'on peut jouer de manière non mécanique avec un jeu formel et qu'il peut être riche en inspirations.*

*La méthode axiomatique moderne est essentiellement libérale.*

*Les axiomes sont les seules restrictions imposées aux objets de l'étude et de la théorie, riche de toute une gamme de vicariances qui assure la multiplicité de la vision et favorise l'exercice de la liberté créative.*

\*

*L'exposé mathématique le moins formalisé comportera néanmoins certaines formalisations locales, éventuellement fort utiles.*

*Un progrès mathématique consiste souvent à fournir un algorithme résolvant mécaniquement un problème, ce qui libère le cerveau pour d'autres tâches*

*BOOLE a montré que la logique propositionnelle pouvait être formalisée et ses démonstrations réduites à un calcul algébrique.*

*Inversement, tout calcul est une démonstration formalisée.*

*L'égalité  $117 + 118 = 235$  démontre que la réunion de deux ensembles disjoints de 117 et de 118 objets comporte exactement deux cent trente-cinq objets.*

\*

*Le rappel périodique et salutaire à l'importance du calcul numérique élémentaire plaide pour le respect d'un aspect de démonstration formalisée.*

*L'irruption des calculateurs électroniques à main dans notre vie quotidienne dispense à jamais nos cerveaux de participer à de longs et fastidieux calculs numériques, et il est devenu désormais illusoire d'y vouloir encore exercer nos enfants.*

*Tout progrès comporte son revers.*

*La pratique purement mécanique du calcul pouvait jadis familiariser de manière active avec le fait numérique et permettre de dégager a posteriori une compréhension plus profonde à partir de l'exercice algorithmique.*

*Regrets et lamentations sont vains car la situation est irréversible.*

*Mais le nouveau contexte impose de consacrer la valeur démonstrative et raisonnante du calcul en lui assurant une incorporation multiple et en le douant d'un support sensoriel diversifié, ce que permet tout un arsenal de moyens pédagogiques bien connus.*

\*

*Le Minicomputer et les flèches multicolores font comprendre à l'enfant le genre de travail réalisé par l'auxiliaire électronique en l'incitant et en l'aidant à effectuer avec eux certaines opérations jointes à un certain calcul mental, modeste, harmonieuse et salutaire symbiose de pensée et d'algorithme.*

*Il n'y a pas de méthode-miracle.*

*Certains enfants comprennent la nature des opérations, savent les effectuer en s'aidant des flèches et du Minicomputer mais se trouvent néanmoins fort démunis lorsque, d'un problème, la bise fut venue.*

*Jadis, de tels enfants n'avaient même pas l'occasion de montrer leur aptitude à découvrir une stratégie pour résoudre un problème car ils buttaient irrémédiablement sur le premier obstacle numérique.*

*Des interviews cliniques de FREDERIQUE semblent montrer qu'armés d'un calculateur électronique et aidés par les graphes qui fixent les étapes, certains de ces enfants parviennent à résoudre des problèmes jadis interdits.*

\*

*Presque toute démarche mathématique comporte une partie algorithmique qui constitue de la démonstration mathématique régulière et mécanique.*

*L'expérience montre que certains esprits, assez à l'aise dans le raisonnement conceptuel, butent sur ces fragments mécanisés.*

*Un des grands soucis de l'enseignement de la mathématique est d'éviter l'embûche algorithmique, en la remplaçant par une vision mathématique ou en la rendant aussi intelligible que possible.*

*Dans le cas évoqué ci-dessus, c'est le calculateur à main qui vient au secours de l'enfant.*

*On se demande bien pourquoi on refuserait son aide !*

*Mais attention, utilisons cette technique pour nous aider à mieux vivre et permettre à nos enfants de mieux penser.*

*N'en devenons pas l'esclave !*

*Evitons la pollution des faux problèmes, inventés à cause des calculateurs.*

*L'usage des minicalculateurs électroniques est si simple qu'il serait contre-nature de faire trop de cas de leur présence.*

*Celle-ci peut et doit aider et non perturber.*

\*

*Toute démarche mathématique est un cheminement démonstratif allant du connu à la découverte de l'encore inconnu par une suite d'évidences.*

*L'enfant, et beaucoup d'adultes, n'éprouvent nul besoin de prouver l'évidence.*

*Le but du raisonnement mathématique est d'enrichir la connaissance à partir de ce qui est déjà connu.*

*Ainsi procédait EUCLIDE, l'immortel patron des professeurs de mathématique,*

*Il commence ses éléments en demandant de construire au moyen de la règle et du compas un triangle équilatéral.*

*Comme deux des cercles utilisés se coupent de manière évidente, il n'éprouve nul besoin de prouver l'existence du point d'intersection, mais il raisonne de manière impeccable sur ledit point afin d'établir qu'il vient de construire le triangle recherché.*

\*

*La démonstration a un incontestable aspect social.*

*Il ne suffit pas de connaître, il faut encore communiquer, et distinguer où est la vérité parmi des conjectures contradictoires.*

*Etablir, comme on le faisait jadis, que d'un point pris sur une droite on pouvait, dans le plan, lui élever une seule perpendiculaire était pour beaucoup d'élèves sujet à un ahurissement justifié.*

*Car aucun d'eux n'avait jamais douté du fait.*

*Et voilà qu'un professeur voulait que l'on s'échine à prouver l'évidence d'une manière d'ailleurs ténébreuse, pour ne pas dire erronée, à partir du beaucoup moins évident aux yeux des élèves.*

\*

*Toute démarche mathématique est démonstrative.*

*Mais quand on évoque les démonstrations, on songe d'habitude à celles des grands théorèmes, d'abord énoncés, dénudés de manière à bien mettre en évidence que leur hypothèse et leur thèse.*

*Car la démonstration est parfois un acte social doué d'un rituel, éventuellement impressionnant.*

*En présentant d'abord l'énoncé du théorème, surtout si on l'accompagne d'un commentaire très intéressant, on consomme parfois d'emblée tout l'intérêt de la situation.*

*La signification, la portée, l'évidence de la proposition sont acquises avant la démonstration qui tombe à plat tandis que les meilleurs esprits de l'auditoire rêvent encore aux perspectives du commentaire inspirant.*

*Paul MONTEL aimait raconter l'aventure qui lui était arrivée pendant la guerre 14-18 alors qu'il faisait des cours aux officiers de l'armée américaine.*

*Il mettait tout son art à expliquer de manière exquise et lumineuse la signification d'un théorème. Et quand il passait à sa preuve, il sentait l'attention se dissiper.*

*Un jour d'ailleurs, un jeune colonel lui dit :*

*"Mais, Monsieur le Professeur, pourquoi vous donner tant de peine à vous justifier! Nous vous croyons sur parole! "*

*Certains mathématiciens évitent ce traquenard en présentant une situation et en l'étudiant sans annoncer d'avance les résultats que l'on obtient chemin faisant par voie démonstrative non douloureuse.*

*Cette méthode comporte le danger de ne pas toujours mettre en évidence les résultats importants qui seront utilisés dans la suite.*

*On peut évidemment obvier à ce danger en prenant soin de bien épingler ces résultats.*

*La rédaction d'un texte mathématique dans cette ligne de conduite est souvent difficile.*

*En certaines circonstances, ce procédé peut d'ailleurs ne pas être naturel et donner l'impression désagréable que le meneur de jeu veut cacher le sien.*

*Une situation peut poser tout naturellement une question, dont la réponse nécessite une démonstration grandiose.*

*Il serait alors inconvenant de ne pas donner d'emblée une réponse.*

*L'intérêt rebondit sur la recherche d'un cheminement possible et non entrevu conduisant au résultat.*

\*

*Tout exposé mathématique est une pérégrination.*

*La promenade peut être intéressante en maints endroits peu connus et non encore fréquentés par les touristes.*

*Cela n'empêche d'être sensibles à certains spectacles grandioses, éventuellement fort fréquentés.*

*Le plaisir d'accueillir vos hôtes en votre jardin secret ne vous dispense pas de leur montrer le Grand Canyon, ou les chutes du Niagara, si vous habitez à deux pas.*

*Étymologiquement, il n'y a pas de petit théorème.*

*Un théorème, c'est, au sens étymologique du terme, la contemplation d'un large spectacle.*

*Cette vision, non-étriquée, non linéaire, en résonance avec la multitude de nos canaux sensori-moteurs, contient de manière intégrante son réseau de cheminements démonstratifs.*

*La démonstration fait partie du spectacle et doit être montrée par les moyens les plus proches de l'authenticité mathématique non robotisée.*

*Toute démonstration est un cheminement de pensée qui s'appuie sur des signaux sonores, scripturaux, algorithmiques, graphiques, ou sur tout autre langage permettant de communiquer l'information et de la fixer pour permettre à la pensée de reprendre haleine sans couper le fil de l'idée.*

*Certains langages respectent mieux que d'autres l'authenticité mathématique.*

*En dehors des traces des maux authentiques attaquant les organes du patient, les radios médicales comportent aussi des artefacts produits par les appareils ou l'émulsion.*

*Le reflet de la réalité mathématique transmise par un message n'est pas toujours exempt de discussions.*

*La formulation mathématique elle-même fourmille en artefacts dus au fait qu'elle présente sous forme d'assemblages totalement ordonnés une réalité qui s'y refuse obstinément.*

*Certaines affirmations sont purement formelles, résultant de la langue, et toute la difficulté se dissipe si l'on veut bien regarder la réalité mathématique au lieu d'être rivé à une écriture imparfaite.*

**PAPY**